

سلسلة مذكرات

# الإبداع

في الرياضيات

المصف الأول الثانوي  
الفصل الدراسي الأول

إعداد /

أ/ جميل غالي السيد

مكتبة وسيم

ش.م.م. شارع حسني مبارك خلف الثانوية بنات

01004423597.3943035

مقرعة

كلمة الطمّوح تعني إبداع العقل ووصوله إلى مدارك الفهم والذكاء،

وكلمة **الإبراهيم** تعني العيش على القمة وإستنشاق عزة العالی لأنه يرجو ولأئما

اللعلى لا يقنع بغيره ولا يرضى إلا القمة المستحقة عن جرارة ،،،،،

فَارْجُو مِنَ اللَّهِ أَنْ أَكُونَ قَدِمْتَ مَا عَلَىٰ مِنْ خَلَّوْهُ هَذَا الْعَمَلِ الْمَتَوَاضِعِ بَيْنَ أَيْدِيكُمْ

وَاللّٰهُ اَدْعُوا اَنْ يُّوَفِّقَكُمْ اِلٰى مَا نَآمِلُوْنَهٗ اَنْتُمْ وَاُولٰٓئِكَ

مع أرق الأمنيات بالنجاح والتميز،،

۱/ جمیل غالی السید

❖ كيف نذاكر مادة الرياضيات:

- نحفظ قوانين الدرس جيدا " بالورقة والقلم "
- نذاكر الأمثلة المحلولة جيدا " بالورقة والقلم "
- نحيد حل الأمثلة المحلولة مرة أخرى دون النظر إلى الإجابة
- نقوم بحل تمارين متنوعة على الدرس

الإلهام

في الرياضيات

أولاً:

الحبر

# الوحدة الأولى

## الجبر والعلاقات والدوال

- (١) حل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد
- (٢) مقدمة عن الأعداد المركبة
- (٣) تحديد نوع جذري المعادلة التربيعية
- (٤) العلاقة بين جذري المعادلة التربيعية ومعاملات حدودها
- (٥) تكوين المعادلة التربيعية من علم جذراها
- (٦) إشارة الدالة
- (٧) متباينة الدرجة الثانية في مجهول واحد

تمارين عامة علي الوحدة  
اختبار تراكمي

(١) حل معادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد

نعلم أنه :

- \* المعادلة  $P = ax^2 + bx + c = 0$  حيث  $a \neq 0$  ،  $b \in \mathbb{R}$  ،  $c \in \mathbb{R}$  هي معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد في  $\mathbb{R}$  . وهذه المعادلة لها حلان " جذران " على الأكثر .
- \* جذرا المعادلة " مجموعة حل المعادلة " هو كل عدد حقيقي يحققها .

أولاً : حل معادلة الدرجة الثانية جبرياً :

(١) باستخدام القليل (٢) باستخدام القانون العام

مثال ١ :- أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :-

- (١)  $x^2 - 5x = 0$
- (٢)  $x^2 - 3x - 17 = 0$
- (٣)  $x^2 - 5x - 6 = 0$
- (٤)  $x^2 - 9 = 0$
- (٥)  $x^2 - 6x + 9 = 0$
- (٦)  $x^2 - 5x + 6 = 0$
- (٧)  $x = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}$

الحل :-

$$(١) \quad x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x - 5) = 0$$

$$\begin{array}{l} \text{إما } x = 0 \\ \text{أو } x - 5 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 5 \end{array}$$

$$\therefore \text{ج ١} = \{0, 5\}$$

$$(١) \quad x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x - 5) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{أو} \quad x = 5$$

$$\text{ج ٢} = \{0, 5\}$$

$$(٣) \quad x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

$$\therefore \text{ج ٣} = \{3\}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 3 \\ \hline 3 \\ 7 \\ \hline 10 \end{array}$$

(18)

"تحلل بالحقص"  $0 = 3x^2 - 17x + 6$

$$0 = (3x - 1)(x - 6)$$

$$\begin{array}{l|l} 0 = 3x - 1 & 0 = 1 + 3x \\ 6 = x & 1 = 3x \\ \hline 6 = x & \frac{1}{3} = x \end{array}$$

$\therefore x = \frac{1}{3}, 6$

"خروجه بسطر مربعية"  $0 = x^2 - 9$

$$0 = (x + 3)(x - 3) \iff x = 3 \text{ أو } x = -3$$

$\therefore x = 3, -3$

"تحلل بالقانون العام"  $0 = x^2 + 5x - 2$

حيث P معامل x ، B معامل x ، ج الحد المطلق  
لا بد أن تكون المعادلة في الصورة  $Px^2 + Bx + ج = 0$

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4PC}}{2P}$$

$$\begin{array}{l|l} 0 = P & \frac{\sqrt{B^2 - 4PC}}{1} = \frac{\sqrt{10 + 4} \pm \sqrt{10 - 4}}{1} = \frac{\sqrt{14} \pm \sqrt{6}}{0 \times 1} = x \\ C = 1 & \\ 5 = B & \end{array}$$

$$\frac{\sqrt{14} \pm 1}{0} = \frac{(\sqrt{14} \pm 1) \times 1}{0} = \frac{\sqrt{14} \pm 1}{1} = x$$

$\therefore x = \frac{\sqrt{14} - 1}{0}, \frac{\sqrt{14} + 1}{0}$

(17)  $x = \frac{0}{0} + x \iff x = 0 + x \iff x = 0 + x - x \iff 0 = 0 + x - x$

$$\begin{array}{l|l} 1 = P & \frac{\sqrt{0 - 17} \pm 1}{1} = \frac{0 \times 1 \times 17 \pm 1}{1 \times 1} = \frac{-\sqrt{17} \pm 1}{1} = x \\ 5 = B & \\ 0 = ج & \end{array}$$

$\therefore$  لا يوجد حل للمعادلة في  $\mathbb{R}$

$\sqrt{-17} \neq 2$

$$\frac{\sqrt{-17} \pm 1}{1} = x$$

$\therefore x = \phi$

\* \* \* تدريبي \* أو مجموعة حل كل معادلات الآتية :-

$$(٤) \quad ٥س - ١٤ = ٨ + ٥$$

$$(١) \quad ٥س + ٣ = ٥$$

$$(٥) \quad ٥س - ١ = ٥$$

$$(٦) \quad ٥س - ٣ = ٥$$

$$(٦) \quad ٥س + ٥ = ٥ - ٥$$

$$(٣) \quad ٥س + ٥ = ٥ + ٥$$

مثال ٥ :- أطلقت قذيفة رأسياً لأعلى بسرعة ١٩,٦ م/ث. ١٠ أصب  
الفترة الزمنية  $t$  بالثانية التي تستغرقها حتى تصل إلى ارتفاع ٣ م  
حيث  $t$  تساوي ٧,١٤ م علماً بأنه العلاقة بين  $t$  و  $h$  هي  $h = ١٩,٦t - ٥t^2$   
الكل :-

$$١٩,٦ = ٥t \quad , \quad ٧,١٤ = t \quad , \quad ١٩,٦ = ٥t$$

$$٧,١٤ = ١٩,٦ - ٥t \quad \Leftrightarrow \quad (٧,١٤ \div ٥) \quad \Leftrightarrow \quad ١,٤٢٨ = ٣,٩٢ - t$$

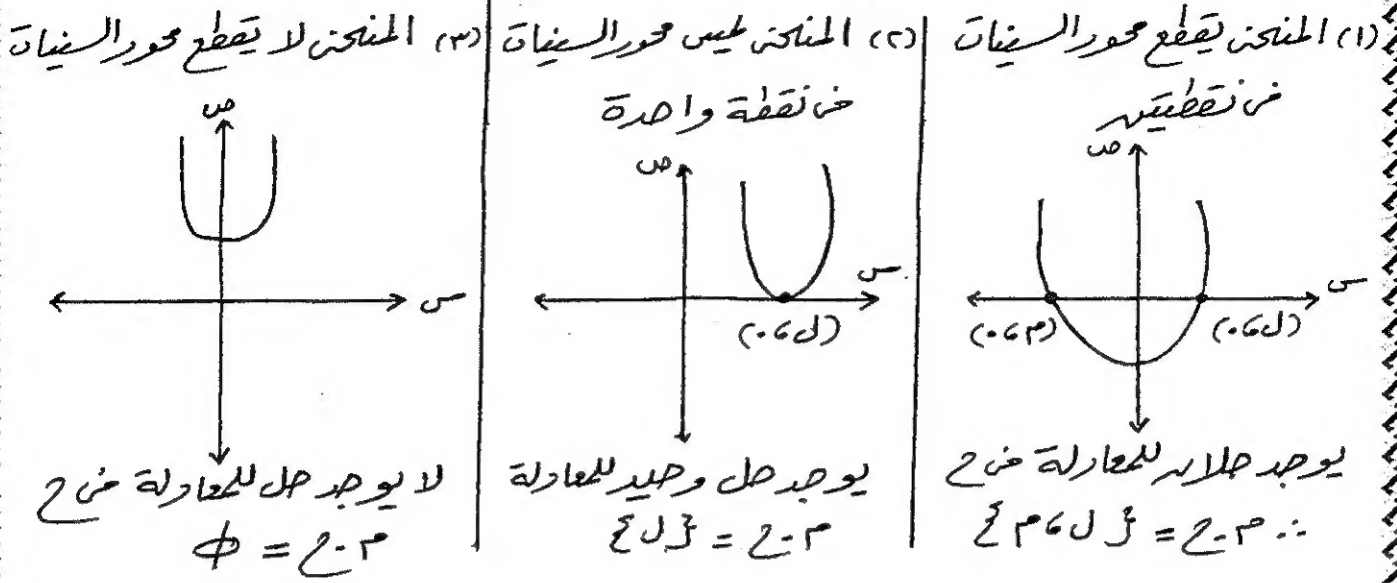
$$\Leftrightarrow \quad ٣,٩٢ - ١,٤٢٨ = t \quad \Leftrightarrow \quad ٢,٤٩٢ = t$$

أي أنه :- القذيفة تصل إلى ارتفاع ٧,١٤ م بعد  $t = ٢,٤٩٢$  ثم تستمر في الحركة لأعلى حتى  
تصل إلى أقصى ارتفاع ثم تنحدر للأسفل وتعود لنفس الارتفاع بعد  $t = ٤,٩٨٤$ .

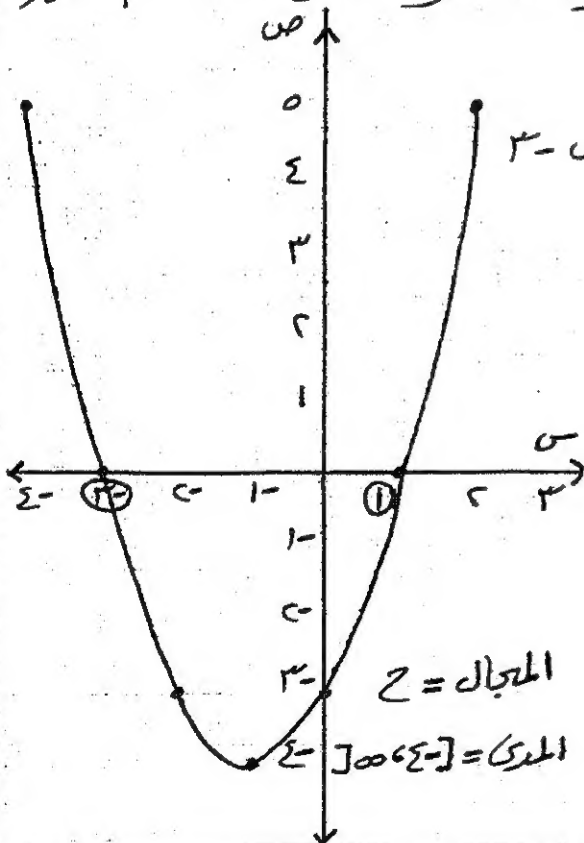
ثانياً : حل معادلة الدرجة الثانية بيانياً :-

لك المعادلة  $٥س^2 + ٣س - ٥ = ٠$  بيانياً نرسم منحنى الدالة  $٥س^2 + ٣س - ٥$  مع محور السينات  
ثم نهيئ مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنى مع محور السينات  
فتكون هي مجموعة الحل.

① وتوجد ثلاث حالات :-



مثال ١٤ :- حل المعادلة  $x^2 + x - 3 = 0$  بيانياً من الفترة  $[-4, 4]$  ثم تحققه عددياً الحل جبرياً .



الحل :- ندرس منحنى الدالة  $f(x) = x^2 + x - 3$

س	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
د(س)	5	0	-3	-2	-3	0	1	4	9

ومن الرسم نجد أنه  $3 = 1$  و  $3 = -3$

الآن نتحقق من صحة الحل جبرياً :-

$$x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) = 0$$

$$x = 1 \text{ أو } x = -3$$

$$\therefore 3 = 1 \text{ أو } 3 = -3$$

② وعليه نتحقق من صحة الحل أيضاً بالتعويض بالمجموعة الحل من المعادلة فنجد أنه يحققها .



هـ "ملحوظة هامة" :- من حالة عدم إعطاء تلك فترة للتمثيل يمكننا الحل بإيجاد نقطة رأس المنحنى وهى  $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$  ثم نوجد عدة نقاط على المنحنى ونربطها

## تمارين على حل معادلة الدرجة الثانية من مجهول واحد

II اختر الإجابة الصحيحة :-

- ① المعادلة  $(x-1)(x+2)=0$  من الدرجة ..... [ الأولى ، الثانية ، الثالثة ، الرابعة ]
- ② جذر المعادلة  $x^2 - 5x + 3 = 0$  هما ..... [  $\frac{5}{2}, \frac{3}{2}$  ،  $5, 3$  ،  $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}$  ،  $-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}$  ]
- ③ مجموعة حل المعادلة  $x^2 + 2 = 0$  فى ح هـ ..... [  $3, -3$  ،  $3, -3, 3, -3$  ،  $3, -3, 3, -3, 3, -3$  ]
- ④ إذا كان  $x = 2$  جذراً للمعادلة  $x^2 + mx + 3 = 0$  فـ  $m =$  ..... [  $1, 2, 3, 4$  ]
- ⑤ مجموعة حل المعادلة  $x^2 = x$  هـ ..... [  $0, 1$  ،  $1, 2$  ،  $2, 3$  ،  $3, 4$  ]
- ⑥ إذا قطع منحنى الدالة التربيعية محور السينات من نقطتين فإحدى جذور حلول المعادلة هو ..... [ صفر ، 1 ، 2 ، عدد لا نطرق ]

III أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات الآتية :-

- (1)  $x^2 - 5x + 6 = 0$     (2)  $x^2 - 3 = 0$     (3)  $x(x+1)(x-1) = 0$
- (4)  $x^2 + 3x = 0$     (5)  $x^2 + 9 = 0$     (6)  $x^2 - 5x + 1 = 0$

IV حل كل معادلة من المعادلات الآتية منج باستخدام القانون العام :-

- (1)  $x^2 - 7x + 6 = 0$     (2)  $x^2 + 6x + 8 = 0$     (3)  $x^2 - 3x - 1 = 0$
- (4)  $x^2 + 2x - 8 = 0$     (5)  $x^2 - 3x - 6 = 0$     (6)  $x^2 - 5x - 2 = 0$

V أوجد مجموعة حل المعادلة  $x^2 - 5x + 6 = 0$  بيانياً من الفترة [ 0 ، 6 ]

VI أوجد قيمة كل من  $p$  و  $b$  إذا كان  $3, 6$  هما جذر المعادلة  $x^2 + px + b = 0$

### (٢) مقدمة عن الأعداد المركبة

تمهيد :- سنبصر أنه درسنا نظام الأعداد الطبيعية (عد) ونظام الأعداد الطبيعية (ط)

ونظام الأعداد النسبية (ص) ونظام الأعداد الحقيقية (ح)

وعلمنا أنه أي نظام نشأ لتوسيع للنظام الذي يسبقه لحل معادلات جديدة لم تكن قابلة للحل في النظام السابق.

فمثلاً المعادلة  $x + 1 = 0$  لا يحل في  $\mathbb{N}$  (ليس لها حل في  $\mathbb{N}$ )

لذا كانه التفكير في نظام جديد للأعداد عليه حل هذا النوع من المعادلات ويكونه توسيع لنظام الأعداد الحقيقية (ح).

### العدد التخيلي (د) :-

كل المعادلة السابقة سنفرص عدد  $i$   $i^2 = -1$  يحقق المعادلة  $x^2 + 1 = 0$  وسنرمز لهذا

العدد بالرمز (د) أي أنه "العدد التخيلي" هو العدد الذي مربعه  $-1$  وبالرمز  $i = -1$

وعلى هذا فإنه عليه حل المعادلة  $x^2 + 1 = 0$  كالنظام :-

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\} \quad \text{حيث } i^2 = -1$$

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\} \quad \text{حيث } i^2 = -1$$

وبذلك نوجد مجموعة جديدة من الأعداد تسمى مجموعة الأعداد التخيلية.

مثال ① أوجد مجموعة حل المعادلة  $x^2 + 17 = 0$ .

$$x^2 + 17 = 0 \Rightarrow x^2 = -17 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-17} = \pm i\sqrt{17}$$

$$\therefore x = \pm i\sqrt{17}$$

$$\therefore x = \pm i\sqrt{17}$$



الابداع في الرياضيات

فَنَكِلُوهُ إِلَىَّ = أَهْدِيهِ الصَّيِّغَ كَمَا بِالْمَجْرُورِ .

\* \* ترتيب \* \* الصبغ ابط صورة :-  
\* \* ٩ ١٩ ٢٨ ٣٥ ٤٢ ٥٠ ٥٨ ٦٦ ٧٤ ٨٢ ٩٠ ٩٨ ١٠٦ ١١٤ ١٢٢ ١٣٠ ١٣٨ ١٤٦ ١٥٤ ١٦٢ ١٧٠ ١٧٨ ١٨٦ ١٩٤ ٢٠٢ ٢١٠ ٢١٨ ٢٢٦ ٢٣٤ ٢٤٢ ٢٥٠ ٢٥٨ ٢٦٦ ٢٧٤ ٢٨٢ ٢٩٠ ٢٩٨ ٣٠٦ ٣١٤ ٣٢٢ ٣٣٠ ٣٣٨ ٣٤٦ ٣٥٤ ٣٦٢ ٣٧٠ ٣٧٨ ٣٨٦ ٣٩٤ ٤٠٢ ٤١٠ ٤١٨ ٤٢٦ ٤٣٤ ٤٤٢ ٤٥٠ ٤٥٨ ٤٦٦ ٤٧٤ ٤٨٢ ٤٩٠ ٤٩٨ ٥٠٦ ٥١٤ ٥٢٢ ٥٣٠ ٥٣٨ ٥٤٦ ٥٥٤ ٥٦٢ ٥٧٠ ٥٧٨ ٥٨٦ ٥٩٤ ٦٠٢ ٦١٠ ٦١٨ ٦٢٦ ٦٣٤ ٦٤٢ ٦٥٠ ٦٥٨ ٦٦٦ ٦٧٤ ٦٨٢ ٦٩٠ ٦٩٨ ٧٠٦ ٧١٤ ٧٢٢ ٧٣٠ ٧٣٨ ٧٤٦ ٧٥٤ ٧٦٢ ٧٧٠ ٧٧٨ ٧٨٦ ٧٩٤ ٨٠٢ ٨١٠ ٨١٨ ٨٢٦ ٨٣٤ ٨٤٢ ٨٥٠ ٨٥٨ ٨٦٦ ٨٧٤ ٨٨٢ ٨٩٠ ٨٩٨ ٩٠٦ ٩١٤ ٩٢٢ ٩٣٠ ٩٣٨ ٩٤٦ ٩٥٤ ٩٦٢ ٩٧٠ ٩٧٨ ٩٨٦ ٩٩٤ ١٠٠٢ ١٠١٠ ١٠١٨ ١٠٢٦ ١٠٣٤ ١٠٤٢ ١٠٥٠ ١٠٥٨ ١٠٦٦ ١٠٧٤ ١٠٨٢ ١٠٩٠ ١٠٩٨ ١١٠٦ ١١١٤ ١١٢٢ ١١٣٠ ١١٣٨ ١١٤٦ ١١٥٤ ١١٦٢ ١١٧٠ ١١٧٨ ١١٨٦ ١١٩٤ ١٢٠٢ ١٢١٠ ١٢١٨ ١٢٢٦ ١٢٣٤ ١٢٤٢ ١٢٥٠ ١٢٥٨ ١٢٦٦ ١٢٧٤ ١٢٨٢ ١٢٩٠ ١٢٩٨ ١٣٠٦ ١٣١٤ ١٣٢٢ ١٣٣٠ ١٣٣٨ ١٣٤٦ ١٣٥٤ ١٣٦٢ ١٣٧٠ ١٣٧٨ ١٣٨٦ ١٣٩٤ ١٤٠٢ ١٤١٠ ١٤١٨ ١٤٢٦ ١٤٣٤ ١٤٤٢ ١٤٥٠ ١٤٥٨ ١٤٦٦ ١٤٧٤ ١٤٨٢ ١٤٩٠ ١٤٩٨ ١٥٠٦ ١٥١٤ ١٥٢٢ ١٥٣٠ ١٥٣٨ ١٥٤٦ ١٥٥٤ ١٥٦٢ ١٥٧٠ ١٥٧٨ ١٥٨٦ ١٥٩٤ ١٦٠٢ ١٦١٠ ١٦١٨ ١٦٢٦ ١٦٣٤ ١٦٤٢ ١٦٥٠ ١٦٥٨ ١٦٦٦ ١٦٧٤ ١٦٨٢ ١٦٩٠ ١٦٩٨ ١٧٠٦ ١٧١٤ ١٧٢٢ ١٧٣٠ ١٧٣٨ ١٧٤٦ ١٧٥٤ ١٧٦٢ ١٧٧٠ ١٧٧٨ ١٧٨٦ ١٧٩٤ ١٨٠٢ ١٨١٠ ١٨١٨ ١٨٢٦ ١٨٣٤ ١٨٤٢ ١٨٥٠ ١٨٥٨ ١٨٦٦ ١٨٧٤ ١٨٨٢ ١٨٩٠ ١٨٩٨ ١٩٠٦ ١٩١٤ ١٩٢٢ ١٩٣٠ ١٩٣٨ ١٩٤٦ ١٩٥٤ ١٩٦٢ ١٩٧٠ ١٩٧٨ ١٩٨٦ ١٩٩٤ ٢٠٠٢ ٢٠١٠ ٢٠١٨ ٢٠٢٦ ٢٠٣٤ ٢٠٤٢ ٢٠٥٠ ٢٠٥٨ ٢٠٦٦ ٢٠٧٤ ٢٠٨٢ ٢٠٩٠ ٢٠٩٨ ٢١٠٦ ٢١١٤ ٢١٢٢ ٢١٣٠ ٢١٣٨ ٢١٤٦ ٢١٥٤ ٢١٦٢ ٢١٧٠ ٢١٧٨ ٢١٨٦ ٢١٩٤ ٢٢٠٢ ٢٢١٠ ٢٢١٨ ٢٢٢٦ ٢٢٣٤ ٢٢٤٢ ٢٢٥٠ ٢٢٥٨ ٢٢٦٦ ٢٢٧٤ ٢٢٨٢ ٢٢٩٠ ٢٢٩٨ ٢٣٠٦ ٢٣١٤ ٢٣٢٢ ٢٣٣٠ ٢٣٣٨ ٢٣٤٦ ٢٣٥٤ ٢٣٦٢ ٢٣٧٠ ٢٣٧٨ ٢٣٨٦ ٢٣٩٤ ٢٤٠٢ ٢٤١٠ ٢٤١٨ ٢٤٢٦ ٢٤٣٤ ٢٤٤٢ ٢٤٥٠ ٢٤٥٨ ٢٤٦٦ ٢٤٧٤ ٢٤٨٢ ٢٤٩٠ ٢٤٩٨ ٢٥٠٦ ٢٥١٤ ٢٥٢٢ ٢٥٣٠ ٢٥٣٨ ٢٥٤٦ ٢٥٥٤ ٢٥٦٢ ٢٥٧٠ ٢٥٧٨ ٢٥٨٦ ٢٥٩٤ ٢٦٠٢ ٢٦١٠ ٢٦١٨ ٢٦٢٦ ٢٦٣٤ ٢٦٤٢ ٢٦٥٠ ٢٦٥٨ ٢٦٦٦ ٢٦٧٤ ٢٦٨٢ ٢٦٩٠ ٢٦٩٨ ٢٧٠٦ ٢٧١٤ ٢٧٢٢ ٢٧٣٠ ٢٧٣٨ ٢٧٤٦ ٢٧٥٤ ٢٧٦٢ ٢٧٧٠ ٢٧٧٨ ٢٧٨٦ ٢٧٩٤ ٢٨٠٢ ٢٨١٠ ٢٨١٨ ٢٨٢٦ ٢٨٣٤ ٢٨٤٢ ٢٨٥٠ ٢٨٥٨ ٢٨٦٦ ٢٨٧٤ ٢٨٨٢ ٢٨٩٠ ٢٨٩٨ ٢٩٠٦ ٢٩١٤ ٢٩٢٢ ٢٩٣٠ ٢٩٣٨ ٢٩٤٦ ٢٩٥٤ ٢٩٦٢ ٢٩٧٠ ٢٩٧٨ ٢٩٨٦ ٢٩٩٤ ٣٠٠٢ ٣٠١٠ ٣٠١٨ ٣٠٢٦ ٣٠٣٤ ٣٠٤٢ ٣٠٥٠ ٣٠٥٨ ٣٠٦٦ ٣٠٧٤ ٣٠٨٢ ٣٠٩٠ ٣٠٩٨ ٣١٠٦ ٣١١٤ ٣١٢٢ ٣١٣٠ ٣١٣٨ ٣١٤٦ ٣١٥٤ ٣١٦٢ ٣١٧٠ ٣١٧٨ ٣١٨٦ ٣١٩٤ ٣٢٠٢ ٣٢١٠ ٣٢١٨ ٣٢٢٦ ٣٢٣٤ ٣٢٤٢ ٣٢٥٠ ٣٢٥٨ ٣٢٦٦ ٣٢٧٤ ٣٢٨٢ ٣٢٩٠ ٣٢٩٨ ٣٣٠٦ ٣٣١٤ ٣٣٢٢ ٣٣٣٠ ٣٣٣٨ ٣٣٤٦ ٣٣٥٤ ٣٣٦٢ ٣٣٧٠ ٣٣٧٨ ٣٣٨٦ ٣٣٩٤ ٣٤٠٢ ٣٤١٠ ٣٤١٨ ٣٤٢٦ ٣٤٣٤ ٣٤٤٢ ٣٤٥٠ ٣٤٥٨ ٣٤٦٦ ٣٤٧٤ ٣٤٨٢ ٣٤٩٠ ٣٤٩٨ ٣٥٠٦ ٣٥١٤ ٣٥٢٢ ٣٥٣٠ ٣٥٣٨ ٣٥٤٦ ٣٥٥٤ ٣٥٦٢ ٣٥٧٠ ٣٥٧٨ ٣٥٨٦ ٣٥٩٤ ٣٦٠٢ ٣٦١٠ ٣٦١٨ ٣٦٢٦ ٣٦٣٤ ٣٦٤٢ ٣٦٥٠ ٣٦٥٨ ٣٦٦٦ ٣٦٧٤ ٣٦٨٢ ٣٦٩٠ ٣٦٩٨ ٣٧٠٦ ٣٧١٤ ٣٧٢٢ ٣٧٣٠ ٣٧٣٨ ٣٧٤٦ ٣٧٥٤ ٣٧٦٢ ٣٧٧٠ ٣٧٧٨ ٣٧٨٦ ٣٧٩٤ ٣٨٠٢ ٣٨١٠ ٣٨١٨ ٣٨٢٦ ٣٨٣٤ ٣٨٤٢ ٣٨٥٠ ٣٨٥٨ ٣٨٦٦ ٣٨

لدينا جادول المعادلة  $S = C_0 + C_1 X$  . بالقانون العام نجد أن :-  

$$\frac{C_0 + C_1 \bar{X} \pm 1}{C} = \frac{\bar{X} - 1 \pm 1}{C} = \frac{C_0 X + C_1 \bar{X} - 1 \pm 1}{1 \times C} = \frac{C_0 \bar{X} - 1 \pm 1}{C} = S$$

أي أنه:- المعادلة لها جذرانها  $x+3$  و  $x-6$  وللتأكد لا يتفحصا به و أي مجموعة الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$  ليس كل عدد  $x+3$  و  $x-6$  و "عددا حركيا"

أشغله لإعداد مركبة :- ٢-٣ ٦+٧ ٦ ٦-٥ ٦+٧ ٦-٤

(1) إذا كان  $p = \varepsilon$  و  $b = 0$ ، فإن  $p = \varepsilon$  و  $b = 0$  "حقيقاً صرفاً".

(۳) اُنی عدد حقیق هو عدد مرکب جزئاً و التافیل = صفر .

(دع) اسی عدد تخیلیں جو عدد حریف جزوہ الحقیقہ = صفر .

## كسوى عددية مركبة :-

يسوى العدد المركبة إذا وقطع إذا كسوى الجزاء الحقيقية وكسوى الجزاء التخيلية .

أي أنه :- إذا كان  $P + B + S = P + B + S$  فانه  $P = P$  و  $S = S$   
 الجزء الحقيقي = الجزء الحقيقي  $\Rightarrow$  الجزء التخيلي = الجزء التخيلي "والعكس صحيح"  
 ← "خاصية" إذا كان  $P + B + S = 0$   $\Leftrightarrow P = -B - S$  صفر (موجة)  
 $B = -P - S$

مثال ⑤ :- أوجد قيمتي  $S$  و  $B$  إذا كان :-

$$(1) \quad S - 3B + (5 + 7i) = 0 + 7i$$

$$(2) \quad S + 5B - 2 = 0$$

الحل :-

(1) :- العدد المركبة متساوية  $\Leftrightarrow$  الحقيقي = الحقيقي  $\Rightarrow$  التخيلي = التخيلي

$$S - 3B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S = 3B$$

$$5 + 7i = 0 + 7i \quad (2 \times) \quad 0 = 5 + 5B$$

$$5 = -5B \quad \xrightarrow{(-5 \div)} \quad 1 = -B \quad \Rightarrow \quad B = -1$$

$$S = 3B \quad \Rightarrow \quad S = 3(-1) = -3$$

$$1 = -B \quad \xrightarrow{(-1 \div)} \quad -1 = B$$

(2) :- العدد المركبة = صفر  $\Leftrightarrow$  الحقيقي = صفر  $\Rightarrow$  التخيلي = صفر

$$S + 5B - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S + 5B = 2$$

$$S + 5B = 2 \quad \Leftrightarrow \quad S = 2 - 5B$$

\* تدوين \* أو جد قيم  $x$  من إذا كان :-

$$(1) \quad (x-5)(x+5) + (x+5)(x-5) = 0$$

$$(2) \quad 5x + (x-5) + (x+5) = 0$$

### العمليات على الأعداد المركبة :-

يمكن استخدام خواص الأبدال والجمع والتوزيع عند جمع أو ضرب الأعداد المركبة .  
عند جمع أو طرح عددين مركبين نجمع أو نطرح الحزائيد الحقيقية معًا والحزائيد التخيلية معًا .

مثال ② :- أو جد ناتج ما يأتي من أبسط صورة :-

$$(5) \quad (3-2i)(3+2i)$$

$$(11) \quad (7+3i) + (9-i)$$

$$(6) \quad (1-i)^2$$

$$(12) \quad (4-i) - (5-i)$$

$$(7) \quad (1-i)^4$$

$$(13) \quad (2+3i)(5-i)$$

$$(14) \quad (3+i)^2$$

الحل :-

$$(1) \quad (7+3i) + (9-i) = 16 + 2i$$

$$(2) \quad (4-i) - (5-i) = -1$$

$$(3) \quad (2+3i)(5-i) = 10 - 2i + 15i - 3i^2 = 10 - 2i + 15i + 3 = 13 + 13i$$

$$(4) \quad (3+i)^2 = 9 + 6i + i^2 = 9 + 6i - 1 = 8 + 6i$$

$$(5) \quad (3-2i)(3+2i) = 9 - 4i^2 = 9 - 4(-1) = 9 + 4 = 13$$

$$(6) \quad (1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$$

$$(7) \quad (1-i)^4 = (-2i)^2 = 4i^2 = 4(-1) = -4$$

$$(8) \quad 0$$

"خد بالله"

$$(b+p)^2 = b^2 + 2bp + p^2$$

$$(b-p)^2 = b^2 - 2bp + p^2$$

"فرقة بين مربعين"

$$(٦) \quad (1 - \sqrt{c}) = (1 - \sqrt{c-1}) = (1 + \sqrt{c-1}) = (1 - \sqrt{c}) = (1 - \sqrt{c})$$

$$- \frac{2}{\sqrt{c}} = \frac{2}{\sqrt{c}} =$$

$$(٧) \quad 17 = \frac{2}{\sqrt{17}} = (1 - \sqrt{c}) = (1 + \sqrt{c+1}) = (1 - \sqrt{c+1}) = (1 - \sqrt{c+1})$$

\* \* \* أوجد ناتج ما يأتي من البسط صدارة :-

$$(١) \quad (1 - \sqrt{c}) + (1 + \sqrt{c}) = (1 - \sqrt{c}) + (1 + \sqrt{c})$$

$$(٢) \quad (1 - \sqrt{c}) (1 + \sqrt{c}) = (1 - \sqrt{c}) (1 + \sqrt{c})$$

$$(٣) \quad (1 - \sqrt{c-3}) = (1 - \sqrt{c-3})$$

مثال ٥ :- أوجد س، ص من  $9 - (1 - \sqrt{c}) (1 + \sqrt{c}) = 7$  اللتيه تحقق المعادلة

$$9 - (1 - \sqrt{c}) (1 + \sqrt{c}) = 7$$

$$\text{الحل :-} \quad 9 - (1 - \sqrt{c}) (1 + \sqrt{c}) = 7$$

$$\therefore 9 - (1 - \sqrt{c}) (1 + \sqrt{c}) = 7 \quad \therefore 9 - 1 + \sqrt{c} - \sqrt{c} = 7$$

$$\therefore 9 - 1 + \sqrt{c} - \sqrt{c} = 7 \quad \therefore 9 - 1 + \sqrt{c} - \sqrt{c} = 7$$

$$\therefore 9 - 1 + \sqrt{c} - \sqrt{c} = 7 \quad \therefore 9 - 1 + \sqrt{c} - \sqrt{c} = 7$$

عدده مركبا حقا ويا له الحقيقه = الحقيقه = التحليل

$$\therefore 9 - 1 + \sqrt{c} - \sqrt{c} = 7 \quad \therefore 9 - 1 + \sqrt{c} - \sqrt{c} = 7$$

$$\therefore 9 - 1 + \sqrt{c} - \sqrt{c} = 7 \quad \therefore 9 - 1 + \sqrt{c} - \sqrt{c} = 7$$

$$\therefore 9 - 1 + \sqrt{c} - \sqrt{c} = 7 \quad \therefore 9 - 1 + \sqrt{c} - \sqrt{c} = 7$$

$$= (1 - \sqrt{c}) (1 + \sqrt{c})$$

$$3 = \sqrt{c} \quad \therefore 3 = \sqrt{c} \quad \therefore 3 = \sqrt{c}$$

$$c = 9 \quad \therefore c = 9 \quad \therefore c = 9$$

$$9 - 1 = 8$$

$$\begin{array}{r} (1 - \sqrt{c}) \\ + \\ (1 + \sqrt{c}) \\ \hline 2 \end{array}$$

جميل غالي السيد

( ١١ )

الفصل الدراسي الأول

$$* * * * * \text{تدريب} * * * * * \text{أوجد من حيث } x \text{ القيمة الحقيقية للمعادلة :-}$$

$$1 + (x + 3)(x + 5) = 1$$

### العددا المرافقان :-

العددا  $P + bi$  و  $P - bi$  يسمىان عددا مرافقان  
 ملاحظة :- العددا المركب ومرافقه لا يختلفان الى غير إشارة الجزء التخيل منها

مثال :- العدد  $3 + 4i$  مرافقه  $3 - 4i$   
 العدد  $5 - 2i$  مرافقه  $5 + 2i$   
 العدد  $7i$  مرافقه  $-7i$  "لاحظ أنه الجزء الحقيقي = صفر"

### ⊗ بعض خواص العددا المرافقان :-

(1) مجموع العددين المرافقين هو عدد حقيقي حيث  $P + bi + P - bi = 2P$   
 مثال  $(3 + 4i) + (3 - 4i) = 6$

(2) حاصل ضرب العددين المرافقين هو عدد حقيقي حيث  $(P + bi)(P - bi) = P^2 + b^2$   
 مثال  $(3 + 4i)(3 - 4i) = 9 + 16 = 25$

(3) يمكن إجراء عملية قسمة عدد مركب على آخر مركب بضرب كل منهما في العدد المرافق للمقام لجعل المقام عددا حقيقيا .

مثال :- ضاع العدد  $\frac{10}{3 + 4i}$  على الصورة  $P + bi$

الحل :- بالضرب بسا ومقاما في  $3 - 4i$

$$\frac{10}{3 + 4i} = \frac{(3 - 4i) \cdot 10}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{(3 - 4i) \cdot 10}{25} = \frac{3 - 4i}{2.5} = \frac{10}{25} \cdot \frac{3 - 4i}{1 + 9} = \frac{3 - 4i}{10}$$

$$* * * * * \text{تدريب} * * * * * \text{ضاع العدد } \frac{5}{2 - 3i} \text{ في الصورة } P + bi .$$



مثال ① :- اختصر لأبسط صورة :-

$$\frac{(c-1)(c+1)}{(c-3)(c+1)}$$

$$(1) \quad \frac{c+3}{c-5}$$

الحل :-

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{c+3}{c-5} \times \frac{c+3}{c-5} &= \frac{c+3}{c-5} \Leftarrow \text{بالضرب لبسطاً ومقاماً فـ } c+5 \\ \frac{c+3}{c-5} &= \frac{10-c+7}{c-5} = \frac{c+10+c+7}{c-5} = \frac{(c+5)(c+3)}{(c+5)(c-5)} = \\ &= \frac{19+c}{c-5} \quad \# \quad \frac{19}{c-5} + \frac{c}{c-5} = \end{aligned}$$

$$\frac{c-3}{c+5} = \frac{1+c-5}{c+5+3} = \frac{c-c-5+c}{c+5+3} = \frac{(c-1)(c+3)}{(c-3)(c+1)}$$

$$\begin{aligned} \frac{1-c-10}{c-7} &= \frac{c+c-3-c-10}{1+c-5} = \frac{c-5}{c-5} \times \frac{c-3}{c+5} = \frac{c-3}{c+5} \Leftarrow \\ \cdot \quad \frac{c}{13} - \frac{5}{13} &= \frac{c}{c-7} - \frac{12}{c-7} = \frac{c-12}{c-7} = \end{aligned}$$

\* \* \* اختصر لأبسط صورة :-

$$\frac{(c+3)(c+5)}{(c-3)(c-5)} \quad (13) \quad \frac{c-7}{c-5} \quad (11) \quad \frac{c-7}{c-5}$$

مثال ② :- إذا كان  $\frac{13}{c-5} = 5$  ،  $\frac{c+3}{c+1} = 5$  . أثبت أن

$\frac{c}{c-5} + \frac{c}{c+5} + \frac{c}{c+1} = 5$

الحل :-

$$\textcircled{1} \quad \frac{c}{c-5} + \frac{c}{c+5} = \frac{c}{c-5} = \frac{(c+5) \times 5}{c-5} = \frac{(c+5)13}{1+c-5} = \frac{c+5}{c-5} \times \frac{13}{c-5} = 5$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{c}{c-5} - \frac{c}{c+5} = \frac{c-5}{c+5} = \frac{c+5-3}{c+5} = \frac{c-c-3-c+3}{1+1} = \frac{c-1}{c+1} \times \frac{c+3}{c+1} = 5$$

منه  $\frac{c}{c-5} + \frac{c}{c+5} + \frac{c}{c+1} = 5$  . يتبع أنه  $\frac{c}{c-5} + \frac{c}{c+5} + \frac{c}{c+1} = 5$  .

كما دبر على " مقدمة عند الأعداد المركبة "

٤ أوجد ناتج ما يأتي ضا أبسط صورة :-

$$\begin{array}{ll} (1) (3+5)(1-2) & (2) (3-2)(3+2) \\ (3) (3+5)(3-2) & (4) (3+5)(3-2) \\ (5) (3+5)(3-2) & (6) (3+5)(3-2) \end{array}$$

٥ أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية :-

$$\begin{array}{ll} (1) 3x + 1 = 0 & (2) 9x + 10 = 71 \\ (3) \frac{3}{5}x + 10 = 0 & (4) 6x - 7 = 13 \\ (5) 4x + 0 = 0 & (6) 7x - 6 = 13 \end{array}$$

٦ أوجد قيمتي س، من اللينيه تحققاه كل معاد المعادلات الآتية :-

$$\begin{array}{ll} (1) (1+x) + 2x = 10 & (2) (1+x) + 2x = 10 \\ (3) (1+x) + 2x = 10 & (4) (1+x) + 2x = 10 \end{array}$$

٧ ضع علامة يأتى ضا أبسط صورة :-

$$\begin{array}{ll} (1) \frac{x+2}{x} & (2) \frac{x-3}{x-2} \\ (3) \frac{6}{x-3} & (4) \frac{x-3}{x-2} \\ (5) \frac{c}{x+1} & (6) \frac{x-3}{x-2} \\ (7) \frac{6}{x-3} & (8) \frac{x-3}{x-2} \end{array}$$

٨ إذا كان  $\frac{x+c}{x+1} = 3$  ،  $\frac{x+c}{x+1} = 3$  ، أثبت أنه لـ م متوافق

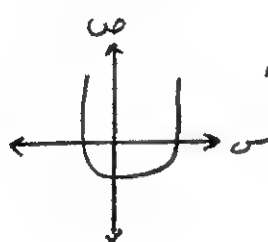
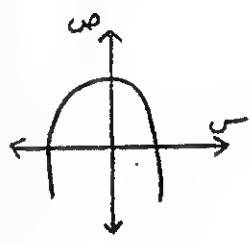
٩ أثبت أنه لـ م متوافق

$$\begin{array}{ll} (1) c = (x-3) + (x+3) & (2) c = (x-3) + (x+3) \\ (3) c = (x-3) + (x+3) & (4) c = (x-3) + (x+3) \end{array}$$

(٣) "تقدير نوع جذري المعادلة التربيعية"

المميز:-

\* جذرا المعادلة التربيعية  $P = x^2 + bx + c = 0$  حيث  $P, b, c \in \mathbb{R}$  حيث  $P \neq 0$   
 هما  $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  وكلاهما يحتوي على المقدار  $\sqrt{b^2 - 4ac}$   
 \* يسمى المقدار  $b^2 - 4ac$  "ميز المعادلة التربيعية" وليست قدم لتقدير نوع جذري



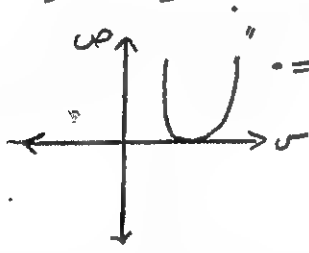
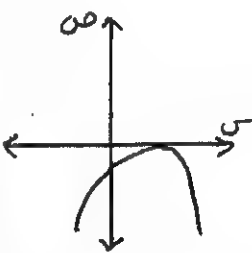
المعادلة التربيعية حسب الحالات الآتية :-

(١) إذا كان المميز موجبا أي أنه  $b^2 - 4ac > 0$

فإنه للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

ومنحنى الدالة  $D(x) = x^2 + bx + c$  يقطع

محور السينات من نقطتين إحداهما السالبة الأخرى الموجبة جذرا المعادلة



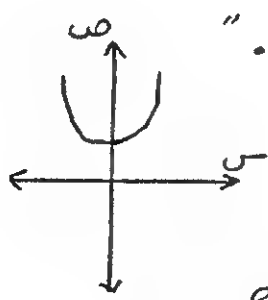
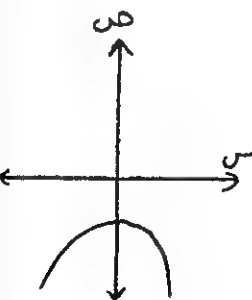
(٢) إذا كان المميز = صفر أي أنه  $b^2 - 4ac = 0$

فإنه للمعادلة جذران حقيقيان متساويان

ومنحنى الدالة  $D(x) = x^2 + bx + c$  لم يمس

محور السينات من نقطة واحدة إحداهما السالبة الأخرى الموجبة جذرا المعادلة وهذه النقطة

هي  $(-\frac{b}{2a}, 0)$  ويكون الجذر هو  $-\frac{b}{2a}$



(٣) إذا كان المميز سالبا أي أنه  $b^2 - 4ac < 0$

فإنه للمعادلة جذران مركبان غير حقيقيين

وهما عددان مترافقان دائما

ومنحنى الدالة  $D(x) = x^2 + bx + c$  لا يمس

محور السينات من أي نقطة (لا يقطع ولا يمس)

مثال ① :- غیر نوع جذری کلمہ المعارلات الآتیة دوسرے حوالے

$$= 7 - 0.2 + 0.1 \quad (1)$$

$$= 9 + 512 + 512 (12)$$

$$= 1 - \sigma_0 + \sum (c) \leftarrow$$

$$\bullet = 1 + \sigma + \sigma_{\infty} \quad (2)$$

الحل :-

$$= 7 - 52 + 53 \therefore \underline{\underline{(1)}}$$

$$\begin{array}{l} \gamma = p \\ \Sigma = \gamma \\ \eta = \gamma \end{array}$$

المحيز =  $\bar{b} - p\varepsilon = 7 - x^3 x \varepsilon - 17 = v_c + 17 = 7 \wedge \wedge$

∴ الجزاءه حقیقانه مختلفانه .

$$\therefore = 3 - \sqrt{5} + \sqrt{5} \therefore \underline{\underline{(c)}}$$

$$\begin{array}{l} 1 = P \\ 0 = C \\ 2 = P \end{array}$$

المميز = ب - ج =  $10 - 3 = 7$

∴ الجزاء حقیقیہ مختلفہ

$$= 9 + 510 + 52 \therefore \underline{(569)}$$

$$\begin{array}{l} \Sigma = P \\ IC = 4 \\ q = 0 \end{array}$$

الحيز = ج - د = ٩٢ - ١٤٤ = ٩ × ٤ × ٤ = ١٤٤ - ١٤٤ = ٠

:- الجزاء الحقيقي في حساباته

$$= 1 + 0 + \frac{5}{\infty} \therefore \underline{\underline{(E)}}$$

$$\begin{array}{l} c_0 = p \\ 1 = q \\ 1 = p \end{array} \quad \Bigg|$$

المميز = ج - ط = ١ - ١ = ٠

:- الجزاء غير حقيقاه (عربانه)

\* تدریب \* غیر نوع جذبی کل صده المعارف الانسانیة ::

$$\bullet = 0 + \sqrt{r - \frac{c}{2}} \quad (1)$$

$$7 = (-5)5 \quad (2)$$

$$= (0 + 510 - \sqrt{c}) (c)$$

$$1 = \sqrt{c} - (1 - \sqrt{c}) \quad (0)$$

$$\Sigma = 0-10 + 5-3(3)$$

$$y = (x + 5)(x - 5) \quad (7)$$

مع "ملاحظات"

- (١) المعادلة  $P^2 + bP + c = 0$  يكون لها جذور حقيقية إذا كان  $b^2 - 4c \geq 0$ .
- (٢) إذا كانت المعاملات  $P, b, c$  أعداد نسبية وكان  $b^2 - 4c$  مربع كامل (له جذر) فإن الجذور تكون أعداداً نسبية (مهمة).

(٣) إذا كان  $c = 0$   $\Leftrightarrow P^2 + bP = 0 \Leftrightarrow P(P + b) = 0$

$$\begin{array}{l} P = 0 \text{ أو } P = -b \\ \boxed{\frac{P}{P} = 1} \end{array}$$

(٤) إذا كان  $b = 0$   $\Leftrightarrow P^2 + c = 0$

$$P^2 = -c \Leftrightarrow P = \pm \sqrt{-c} \Leftrightarrow \frac{P}{P} = \pm \sqrt{\frac{-c}{P^2}} = \pm \sqrt{-\frac{c}{P^2}}$$

مثال ٥ :- إذا كان جذر المعادلة  $3x^2 + 6x + c = 0$  متساويين. أوجد  $c$ .

الحل :- الجذور متساويين  $\Leftrightarrow b^2 - 4c = 0$

$$36 - 4c = 0 \Leftrightarrow 4c = 36 \Leftrightarrow c = 9 \quad \boxed{c = 9}$$

مثال ٦ :- إذا كان  $P, b, c$  أعداداً نسبية فأثبت أنه جذر المعادلة

$$P^2 + (b^2 + c^2)P + (b^2c + bc^2) = 0$$

الحل :- المعاملات أعداد نسبية  $\therefore$  يجب أن تكون  $b^2 - 4c$  مربع كامل.

$$\begin{array}{l} P = P \\ b^2 + c^2 = b^2 + c^2 \\ b^2c + bc^2 = bc(b + c) \end{array} \quad \begin{array}{l} \therefore P^2 + (b^2 + c^2)P + bc(b + c) = 0 \\ = P^2 + b^2P + c^2P + bc(b + c) = 0 \\ = P^2 + b^2P + c^2P + bcP + bc^2 = 0 \\ = P^2 + (b^2 + c^2)P + bc(b + c) = 0 \end{array}$$

$\therefore$  الجذور أعداد نسبية  $\therefore$  الجذر مربع كامل

$\therefore$  الجذور نسبية  $\#$

\* \* \* تدريبي \* (١) إذا كان جذر المعادلة  $x^2 + 2x + 1 = 0$  متساويين. أو جذر  
 (٢) إذا كان  $6p$  ب أعداد نسبية فأثبت أنه جذر المعادلة  

$$p^2 - 2p + (p+1) = 0$$
 . نسبي.

مثال ٣ أثبت أنه جذر المعادلة  $x^2 - 2x + 1 = 0$  مركبا وأوجدها .

الحل :: ∴  $x^2 - 2x + 1 = 0$  ∴  $x^2 - 2x = -1$  ∴  $x^2 - 2x + 1 = 0$  ∴  $(x-1)^2 = 0$  ∴  $x-1 = 0$  ∴  $x = 1$   
 ∴ الجذران متساويين .

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$$

∴ جذر المعادلة هما  $x = 1$  و  $x = 1$

\* \* \* تدريبي \* أثبت أنه جذر المعادلة  $x^2 - 3x + 1 = 0$  . مركبا وأوجدها .

مثال ٤ :: إذا كان جذر المعادلة  $x^2 - 2x + 1 = 0$  متساويين  
 فأوجد قيمة  $k$  الحقيقية ثم أوجد الجذرين .

الحل :: ∴  $x^2 - 2x + 1 = 0$  ∴  $x^2 - 2x = -1$  ∴  $x^2 - 2x + 1 = 0$  ∴  $(x-1)^2 = 0$  ∴  $x-1 = 0$  ∴  $x = 1$

$$\begin{aligned} & \text{∴ الجذران متساويين} \\ & \text{∴ } (x-1)^2 = 0 \\ & \text{∴ } (x-1)^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{∴ } (x-1)^2 = 0 \text{ ∴ } x-1 = 0 \text{ ∴ } x = 1$$

$$\boxed{x = 1}$$

⊗ عند  $x = 1$  المعادلة هي  $x^2 - 3x + 1 = 0$  (بالعقل)

$$\text{∴ } (x-1)^2 = 0 \text{ ∴ } x-1 = 0 \text{ ∴ } x = 1$$

أي أنه عندك  $c$  يكونه الجذرين متساويين وكل منهما  $= 3$ .

\* عندك  $c = -1$  المعادلة هي  $x^2 - 5x + 1 = 0$  (بالتحليل)

$$(x-1)(x-4) = 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \quad \boxed{x=1}$$

أي أنه عندك  $c = -1$  يكونه الجذرين متساويين وكل منهما  $= 1$ .

\* \* \* تدريب \* أوجد قيم  $c$  الحقيقية التي تجعل جذري المعادلة  $x^2 - 5x + c = 0$  متساويين. ثم أوجد هذين الجذرين.

مثال ⑤ :- أوجد قيم  $c$  الحقيقية التي تحقق المعادلة  $x^2 - 5x + c = 0$  لها جذرين حقيقيين (لها حل ضح).

$$\begin{cases} 1 = p \\ c = q \\ c = r \end{cases}$$

الحل :- :- المعادلة لها جذرين حقيقيين

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow 25 - 4c \geq 0 \Rightarrow c \leq \frac{25}{4}$$

$$c \leq \frac{25}{4} \Rightarrow c \leq 6.25$$

$$c \leq 6.25 \Rightarrow c \leq \frac{25}{4}$$

∴ المعادلة لها جذرين حقيقيين إذا كان  $c \leq \frac{25}{4}$

\* \* \* تدريب \* ⑥ أوجد قيم  $c$  التي تجعل للمعادلة  $x^2 - 5x + c = 0$  جذرين حقيقيين مختلفين

$$\Delta > 0 \Rightarrow 25 - 4c > 0 \Rightarrow c < \frac{25}{4}$$

ليس لها جذور حقيقية (ليس لها حل ضح)



تمادي على "تحديد نوع جذري المعادلة التربيعية"

١ اختار الاجابة الصحيحة :-

١ إذا كان جذر المعادلة التربيعية  $س^2 + بس + ج = ٠$  غير حقيقيين فانه ب -  $ج < ٠$  .....  
 (أ)  $ج < ٠$  (ب)  $ج > ٠$  (ج)  $ج = ٠$  (د)  $ج = ١$

٢ إذا كان جذر المعادلة  $س^2 + عس + ك = ٠$  متساويين فانه ك = .....  
 (أ)  $ك < ٠$  (ب)  $ك > ٠$  (ج)  $ك = ٠$  (د)  $ك = ١$

٣ إذا كان جذر المعادلة  $س^2 = بس - ك$  حقيقيين مختلفين فانه ك .....  
 (أ)  $ك < ٠$  (ب)  $ك > ٠$  (ج)  $ك = ٠$  (د)  $ك = ١$

٤ يكون جذر المعادلة  $س^2 - عس + ٩ = ٠$  حقيقيين إذا كانت .....  
 (أ)  $ك < ٠$  (ب)  $ك > ٠$  (ج)  $ك = ٠$  (د)  $ك = ١$

٥ حدد نوع جذري كل معادلة من المعادلات الآتية ووجه حلها :-

(١)  $س^2 - عس + ٥ = ٠$  (٢)  $س^2 - ٦س - ١٩ = ٠$

(٣)  $س^2 + ٣س + ١٠ = ٠$  (٤)  $س(س - ١١) - س(س - ٦) = ٠$

(٥)  $س^2 - ١٠س + ٢٥ = ٠$  (٦)  $(س - ١)(س - ٧) = (س - ٣)(س - ٤)$

٦ أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات الآتية باستخدام القانون العام :-

(١)  $س^2 - عس + ٥ = ٠$  (٢)  $س^2 + ٣س - ١٧ = ٠$

(٣)  $س^2 + ٦س + ٥ = ٠$  (٤)  $س(س - ١) + (س - ١) = ٠$

٧ أوجد قيمة  $ك$  في كل معادلة من الحالات الآتية :-

(١) إذا كان جذر المعادلة  $س^2 + عس + ك = ٠$  حقيقيين مختلفين .

(٢) إذا كان جذر المعادلة  $س^2 - ٣س + ٢ + ١ = ٠$  متساويين .

(٣) إذا كان جذر المعادلة  $س^2 - ٨س + ١٦ = ٠$  حقيقيين .

5 إذا كان  $L$ ،  $M$  عددييه نسبتيه فثبت أنه جذري المعادلة

$$L^2 + (L-M)S - M = 0 \quad \text{عدديه نسبيا}.$$

6 إذا كان جذرا المعادلة  $S^2 + c(1-L) + S(1+c) = 0$  . متساويا

فأوجد قيم  $L$  الحقيقية ثم أوجد الجذريه .

7 أوجد قيمة  $L$  إذا كان :-

(1) جذرا المعادلة  $S^2 = L + c$  حقيقيه مختلفا .

(2) جذرا المعادلة  $(1-S)^2 - 2cS + M = 0$  . غير حقيقيه .

8 اثبت أنه لجميع قيم  $P$  الحقيقية عدا الصفر يكون للمعادلة :-

$$(1+P)^2 - S + P^2 + S = 1 \quad \text{جذور حقيقية}$$

9 يقدر عدد سكان جمهورية مصر العربية عام ٢٠١٣ بالعلاقة :-

$$E = N^2 + c + 91 \quad \text{حيث } E \text{ عدد السكان بالمليون ، } N \text{ عدد السنوات}$$

(1) كم كان عدد السكان عام ٢٠١٣ ؟

(2) قدر عدد السنوات التي يبلغ السكان فيها ٣٢٤ مليون

(3) قدر عدد السكان عام ٢٠٠٣ ؟

10 قطعة أرض على شكل مستطيل بعرض ٩٦ مه الاقطار ، يراد مضاعفه

مساحة هذه القطعة وذلك بزيادة طول كل منه بعدد ينفس المقدار

أوجد المقدار المضاف .

مكتبة وسام

شربين - شارع حسني مبارك - خلف الثانوية بنات

01004423597.3943035

٤٤) الطلاقة بسد جذري المعادلة التربيعية ومعاملات حدودها

تقديم :-

نعلم أنه جذري المعادلة  $x^2 - 13x + 6 = 0$  هما  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{2}{3}$

نلاحظ أنه :- \* مجموع الجذرين =  $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$  = معامل  $x$  معاكس

\* حاصل ضربهم =  $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9} = 1$  = الحد المطلق معاكس

⊗ مجموع الجذرين وحاصل ضرب الجذرين :-

جذرا المعادلة التربيعية  $ax^2 + bx + c = 0$  هما  $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

باعتبار الجذر الأول =  $L$  ، الجذر الآخر =  $M$  فإنه :-

$$L + M = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$L \cdot M = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

هذه الخلاصة :-

وإذا كان  $L, M$  هما جذرا المعادلة  $ax^2 + bx + c = 0$  فإنه

$\frac{c}{a} = L + M$	أي أنه مجموع الجذرين = $-\frac{b}{a}$ معاكس
$\frac{c}{a} = L \cdot M$	أي أنه حاصل ضربهم = $\frac{c}{a}$ الحد المطلق معاكس

(مهمة)

مثال ① :- دوو حل المعادلة أوجد مجموع الجذرين وحاصل ضربهم لكل من المعادلات الآتية :-

$$0 = (x+3)(x-3)$$

$$(1) \quad 0 = x^2 - 9$$

$$(2) \quad 30 - 5x^2 = 0$$

الحل :-

$$(1) \quad 0 = x^2 - 9 \Rightarrow 1 = x^2 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$\therefore \text{مجموع الجذرين} = \frac{c}{a} = \frac{-9}{1} = -9 \quad \text{و} \quad \text{حاصل ضربهم} = \frac{c}{a} = \frac{0}{1} = 0$$

$$(c) \quad 3^2 = 9 = 3 - 5 = 3 - 5 + 3 = 3 \quad \cdot = 3 - 5 + 3 = 3 \quad \cdot = 3 - 5 + 3 = 3$$

$$\therefore \text{مجموع الجذور} = \frac{3}{1} = 3 \quad \text{الحاصل ضرب} = \frac{3}{1} = 3 \quad \boxed{10} = \frac{3}{1} = 3$$

$$(3) \quad \cdot = (2+5)(3-5) = 0 \quad \cdot = 3 - 5 + 3 = 3 \quad \cdot = 3 - 5 + 3 = 3$$

$$\cdot = 3 - 5 + 3 = 3 \quad \cdot = 3 - 5 + 3 = 3 \quad \cdot = 3 - 5 + 3 = 3$$

$$\therefore \text{مجموع الجذور} = \frac{3}{1} = 3 \quad \text{الحاصل ضرب} = \frac{3}{1} = 3 \quad \boxed{10} = \frac{3}{1} = 3$$

\* \* \* تدریب \* \* \* إذا وجد مجموع الجذور والحاصل ضرب لكن من المعادلات الآتية:

$$(1) \quad 5x^2 + 5x + 1 = 0 \quad (3) \quad x(3-x) = 0$$

$$(2) \quad 3x^2 + 5x = 0 \quad (4) \quad (1-x)(3+5x) = 0$$

مثال ٥ :- إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة  $5x^2 - 5x + 1 = 0$  يساوي ٥  
أوجد قيمة  $x$  ثم حل المعادلة.

$$\text{الحل :-} \quad \cdot = 5 - 5 + 1 = 1 \quad \cdot = 5 - 5 + 1 = 1$$

$$\therefore \text{حاصل ضرب الجذور} = 0 \quad \cdot = \frac{5}{1} = 5 \quad \cdot = \frac{5}{1} = 5$$

$$\cdot = \frac{5}{1} = 5 \quad \cdot = \frac{5}{1} = 5 \quad \cdot = \frac{5}{1} = 5$$

$$\text{حل بالقانون :-} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(5)(1)}}{2(5)} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 20}}{10} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{10}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{5}}{10} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{10} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{10} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{10}$$

$$\therefore \text{ج. ٣} = 5 + 1 + 5 - 16 - 5 = 0$$

\* \* \* تدریب \* \* \* إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة  $5x^2 - 5x + 1 = 0$  يساوي ٥  
أوجد قيمة  $x$  ثم حل المعادلة

مثال ٥ :- إذا كان  $x^2 - 5x + 6 = 0$  فما جذور المعادلة

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

أو جذرية كل  $x$  ب

الحل :- مجموع الجذرين  $= -\frac{b}{a} = 5$   $\Rightarrow x_1 + x_2 = 5$   $\Rightarrow x_1 = 5 - x_2$

جاء من  $x^2 - 5x + 6 = 0$   $\Rightarrow x^2 - 5x = -6$   $\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$   $\Rightarrow (x-2)(x-3) = 0$

$$x_1 = 2, x_2 = 3 \Rightarrow \boxed{x_1 = 2, x_2 = 3}$$

مثال ٦ :- إذا كان  $x^2 + 3x - 4 = 0$  أحد جذور المعادلة  $x^2 + 3x - 4 = 0$

حيث  $x_1 = 1$   $\Rightarrow$  أوجد الجذر الآخر  $x_2$  قيمة له

الحل :-

فد باله :-  
إذا كان جذر المعادلة  
عدوانه حر لجان  
فانها يكون  
مراقطة

جاء من  $x^2 + 3x - 4 = 0$   $\Rightarrow x^2 + 3x = 4$   $\Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$   $\Rightarrow (x-1)(x+4) = 0$

مجموع الجذرين  $= -\frac{b}{a} = -3$   $\Rightarrow x_1 + x_2 = -3$

جاء من  $x^2 + 3x - 4 = 0$   $\Rightarrow x^2 + 3x = 4$   $\Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$   $\Rightarrow (x-1)(x+4) = 0$

$$x_1 = 1, x_2 = -4 \Rightarrow \boxed{x_1 = 1, x_2 = -4}$$

هناك حل آخر لهذه المسألة وذلك بالتعويض  $x_1 = 1$  في المعادلة  $x^2 + 3x - 4 = 0$   $\Rightarrow 1^2 + 3(1) - 4 = 0$   $\Rightarrow 1 + 3 - 4 = 0$   $\Rightarrow 0 = 0$   $\Rightarrow$  ثم نوجد  $x_2$  ثم نحل المعادلة بالقانون لإيجاد الجذر الآخر.

مثال ٧ :- إذا كان  $x^2 - 7x + 12 = 0$  جذر المعادلة  $x^2 - 7x + 12 = 0$   $\Rightarrow$  أوجد قيمته  $x_2$  ب

جاء من  $x^2 - 7x + 12 = 0$   $\Rightarrow x^2 - 7x = -12$   $\Rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$   $\Rightarrow (x-3)(x-4) = 0$   $\Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 4$

$\phi = p \downarrow$        $\psi = p \downarrow \Leftarrow 1 = p$  إذا (1)

(c) إذا كان  $p \leq q$  فإن  $p + q \leq p + p = 2p$

أي أنه :- إذا كان أحد الحزبين مغلوبا من بعض الآخر فإنه ب = صفر

$$\frac{1}{f} = d \ll 1 = p d \ll \phi = p \sqrt{613} \text{ cm}$$

أَيُّ أُنْهَ :: إذا كان أحد جذري المعادلة معلوم فنخرجي الآخر فإنه  $p = ج$  |

مثال ۵ :- آئیں :-

(١٤) إذا كان أحد جذري المعادلة  $x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = 0$ ، فمكافئاً مجموعاً الجذور الثلاثة  $= -5$ .....

(c) إذا كان أحد هذه المعادلات  $m^2 + n^2 + v^2 + w^2 = 1$ . فكلوا غير متباينين للآخر فإنه  $---$

الكله :-

(۱) : أحمد الحزبي وقطوس مجيب للأخرى ب = ۰ ب = ۲ - ۳ . ب = ۳

(c) ∴ أحد الجذور يساوي صفرًا  $\Rightarrow P = 0 \Rightarrow 2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$

$$\boxed{1=r} \Leftarrow \cdot = (1-r)(1-r) \Leftarrow \cdot = 1+r(-r) \Leftarrow$$

• بعض الملاحظات العامة للتجارب النظرية :-

\* أحد الجذريين ضعف الآخر " لعل " ل \* أحد الجذريين ثلاثة أفعال الآخر " لعل " ل

\* أهد الخنزير ربع الآخر "لعل" لى \* النفسية بغير الخنزير = ٣: ع "لعل" لعل

\* مجموع الجزيئات = "ل-٥٦-ل" ح \* أحد الجزيئات يزيد على الآخر مقدار "ل٦+ح"

\* أحد الجذبتين الثلاثة أحوال الخلق المحيوس المحيوس للجذب الآخر " ل ٦ - ٣ ل "

\* أحد الحزبين الثلاثة أمثال المغلوس الصنوبري للحزب الآخر "ل" ،  $\frac{3}{2}$  "

\* أهد الخبز لله فزاد عند المجلس الجمعي للأخوة بقدر " ٦ - ٤ - ٤ " "

مثال ⑥ :- إذا كان أحد جذري المعادلة  $x^3 + 3x^2 + 5x + 1 = 0$  ضعف الجذر الآخر  
أوجد قيمته له .

$$\begin{array}{l} 1 = p \\ 3 = q \\ 5 = r \\ 1 = s \end{array}$$

الحل :- بفرضه أحد الجذرين  $x = l$  . الجذر الآخر  $cl = 3l$  .

$$\begin{aligned} \therefore \text{مجموع الجذرين} &= \frac{-q}{p} \Rightarrow \frac{-3}{1} = l + cl = l + 3l = 4l \Rightarrow l = -\frac{3}{4} \\ \therefore \text{حاصل ضربهم} &= \frac{-r}{p} = \frac{-5}{1} = -5 \Rightarrow l \times cl = l \times 3l = 3l^2 = -5 \\ \Rightarrow l^2 &= -\frac{5}{3} \Rightarrow l = \pm \sqrt{-\frac{5}{3}} \Rightarrow \boxed{c = 3} \end{aligned}$$

مثال ⑦ :- أوجد قيمة  $m$  التي تجعل أحد جذري المعادلة  $x^3 + 3x^2 + 5x + 1 = 0$  من مضرب  
ضعف الجذر الآخر بقدر 1

$$\begin{array}{l} 1 = p \\ 3 = q \\ 5 = r \\ 1 = s \end{array}$$

الحل :-  $\therefore x^3 + 3x^2 + 5x + 1 = 0 \Rightarrow x^3 + 3x^2 + 5x + 1 = 0$

بفرضه أحد الجذرين  $x = l$  . الجذر الآخر  $cl = 3l$

$$\begin{aligned} \therefore \text{مجموع الجذرين} &= \frac{-q}{p} = \frac{-3}{1} = -3 \Rightarrow l + cl = l + 3l = 4l = -3 \Rightarrow l = -\frac{3}{4} \\ \therefore \text{حاصل ضربهم} &= \frac{-r}{p} = \frac{-5}{1} = -5 \Rightarrow l \times cl = l \times 3l = 3l^2 = -5 \\ \Rightarrow l^2 &= -\frac{5}{3} \Rightarrow l = \pm \sqrt{-\frac{5}{3}} \Rightarrow \boxed{c = 3} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \text{ج ٧} \\ \begin{array}{c} \vee \\ + \\ \hline 3 \\ - \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$0 = (3-l)(7+cl) \Rightarrow$$

$$0 = 3-l \quad 0 = 7+cl$$

$$3 = l \quad \frac{7}{c} = l$$

$$\Rightarrow \text{من ①} \quad \Rightarrow \text{من ②}$$

$$3 = 1 + 3 \times 3 \quad 3 = 1 + \frac{7}{c} \times 3$$

$$\boxed{10 = 3} \quad \boxed{\frac{19}{c} = 3} \Rightarrow$$

\* تدريس \* (١) إذا كان أحد جذري المعادلة  $x^3 + 3x^2 + 5x + 1 = 0$  ضعف الجذر الآخر  
\* \* الجيب للجذر الآخر أوجد قيمته له

(٢) أوجد قيمة له التي تجعل جذري المعادلة  $x^3 + 3x^2 + 5x + 1 = 0$   
ثلاثة أمثال الجذر الآخر .

مثال ① :- أوجد الشرط اللازم لكي يكون أحد جذري المعادلة

$$x^2 + px + q = 0 \text{ مساوياً للآخر ضعف الجذر الآخر}$$

الحل :- نفرض أحد الجذرين  $\alpha$   $\therefore$  الجذر الآخر  $-\alpha$

$$\therefore \text{مجموع الجذرين} = -\frac{p}{q} \iff \alpha - \alpha = -\frac{p}{q} \iff \frac{p}{q} = 0 \iff p = 0$$

$$\therefore \text{حاصل ضربهم} = \frac{q}{q} = 1 \iff \alpha(-\alpha) = 1 \iff -\alpha^2 = 1 \iff \alpha^2 = -1$$

$$\text{بالتعويض من ①} \iff \frac{p}{q} = 0 \iff p = 0 \iff \frac{q}{q} = 1 \iff q = 1$$

$$\therefore \text{الشرط المطلوب} \iff \boxed{p = 0, q = 1}$$

\* \* \* تدريب \* \* \* أوجد الشرط اللازم لكي يكون أحد جذري المعادلة

$$x^2 + px + q = 0 \text{ مساوياً للآخر ضعف الجذر الآخر}$$

مثال ② :- أوجد قيمة  $p$  التي تجعل جذري المعادلة  $x^2 - 3x + c + \frac{1}{p} = 0$  متساويين

الحل :- الجذرين متساويين  $\iff x_1 = x_2 \iff -\frac{b}{a} = \frac{3}{1} \iff 3 = -\frac{b}{a}$

$$1 = p$$

$$3 = c$$

$$\frac{1}{p} + c = 0$$

$$\iff 0 = \left(\frac{1}{p} + c\right) \times 1 \times 1 - 9 \iff 0 = \left(\frac{1}{p} + c\right) - 9$$

$$\iff \frac{1}{p} + c = 9 \iff \frac{1}{p} = 9 - c$$

$$\iff \boxed{p = 1} \iff \frac{1}{p} = 1$$

مثال ③ :- إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة  $x^2 + 5x + c = 0$  يساوي

مجموع جذري المعادلة  $x^2 - (c+5)x = 0$  أوجد قيمة  $c$

الحل :- حاصل ضرب جذري المعادلة الأولى  $\frac{c}{1} = \frac{p}{q} = \frac{c}{1}$   $\therefore$  مجموع جذري الثانية  $\frac{c}{1} = \frac{p}{q} = \frac{c}{1}$

$$\therefore \frac{c}{1} = \frac{c}{1} \iff c + c = c \iff \boxed{c = 0}$$



تمارين على "العلاقة بين جذري المعادلة التربيعية ومعاملات حدودها"

❶ اختر الاجابة الصحيحة :-

❶ مجموع جذري المعادلة  $x^2 + 5x + 10 = 0$  يساوي ..... [  $-5$  ،  $-10$  ،  $5$  ،  $10$  ]

❷ حاصل ضرب جذري المعادلة  $x^2 - 3x + 0 = 0$  يساوي ..... [  $\frac{3}{2}$  ،  $\frac{3}{4}$  ،  $\frac{0}{2}$  ،  $\frac{0}{4}$  ]

❸ مجموع جذري المعادلة  $x^2 - 5x + 7 = 0$  يساوي ..... [  $-5$  ،  $-7$  ،  $5$  ،  $7$  ]

❹ إذا كان مجموع مجموع جذري المعادلة  $x^2 + 12x + 7 = 0$  يساوي 3 فإنه  $k = \dots$

[  $-7$  ،  $-12$  ،  $7$  ،  $12$  ]

❺ إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة  $x^2 + 4x + c = 0$  يساوي 1 فإنه  $k = \dots$

[  $-1$  ،  $-4$  ،  $1$  ،  $4$  ]

❻ إذا كان أحد جذري المعادلة  $x^2 - (k+3)x + k = 0$  معكوس للجذر الآخر فإنه  $k = \dots$

[  $-3$  ،  $-1$  ،  $1$  ،  $3$  ]

❼ إذا كان أحد جذري المعادلة  $x^2 - (k+3)x + k = 0$  معكوس لجذر آخر فإنه  $k = \dots$

[  $-3$  ،  $-1$  ،  $1$  ،  $3$  ]

❽ إذا كان أحد جذري المعادلة  $x^2 - 12x + 10 = 0$  ثلاثة أضعاف الآخر فإنه  $k = \dots$

[  $-1$  ،  $-12$  ،  $12$  ،  $1$  ]

❾ دوّن حل المعادلة أو جد مجموع الجذرين وحاصل ضربهم لكل من المعادلات الآتية :-

(1)  $x^2 + 5x - 30 = 0$  ، (2)  $(x+3)(x-5) = 0$

(3)  $3x^2 - 7x + 1 = 0$  ، (4)  $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} = 3$  ،  $3 \neq 0$

❿ إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة  $x^2 + 10x + 3 = 0$  هو  $\frac{1}{3}$  أو جد قيمة ج

ثم حل المعادلة في مجموعة الأعداد المركبة

⓫ إذا كان مجموع جذري المعادلة  $x^2 + 5x - 0 = 0$  هو  $\frac{3}{2}$  أو جد قيمة ب

ثم حل المعادلة في مجموعة الأعداد المركبة

٥ أوجد الجذر الآخر للمعادلة ثم أوجد قيمة  $P$  من كل مما يأتي :-

(١) إذا كان  $x^2 - 1 = 0$  أحد جذري المعادلة  $x^2 - 5x + P = 0$

(٢) إذا كان  $x^2 + 1 = 0$  أحد جذري المعادلة  $x^2 - 5x + P = 0$

٦ أوجد قيم  $P$  و  $b$  من كل من المعادلات الآتية إذا كان :-

(١)  $x^2 + 5x + P = 0$  جذر المعادلة  $x^2 + 5x + b = 0$

(٢)  $x^2 - 1 = 0$  جذر المعادلة  $x^2 + 5x + P = 0$

(٣)  $x^2 - 6x + 7 = 0$  جذر المعادلة  $x^2 + 5x + P = 0$

٧ أوجد قيمة  $k$  التي تجعل أحد جذري المعادلة  $x^2 + 5x + k = 0$  هو

هو المقلوب الضرب للجذر الآخر

٨ أوجد قيمة  $k$  التي تجعل أحد جذري المعادلة  $x^2 + 5x + k = 0$  هو

المقلوب المحض للجذر الآخر

٩ إذا كان أحد جذري المعادلة  $x^2 - 3x + 2 = 0$  يساوي مربع الجذر الآخر

أوجد قيمته

١٠ إذا كانت النسبة بين جذري المعادلة  $x^2 + 5x + P = 0$   $2:3$  أثبت أن

$$P = 6$$

١١ أوجد الشرط اللازم لكي يكون أحد جذري المعادلة  $x^2 + 5x + P = 0$  هو

نصف الجذر الآخر

١٢ إذا كان مجموع جذري المعادلة  $x^2 - (2+5)x + 6 = 0$  يساوي حاصل

ضرب جذري المعادلة  $x^2 + 5x + k = 0$  أوجد قيمة  $k$

١٥، تكوير المعادلة التربيعية متى علم جذراها

\* إذا فرضنا أنه  $ل، م$  هما جذري المعادلة التربيعية  $س^2 + س + م = ٠$   $\neq م$

بالقسمة على  $س$   $س + ١ = \frac{م}{س} + س + \frac{س}{س}$   $\Leftarrow ①$

ونعلم أنه  $ل + م = -٢$   $\frac{م}{ل} = -٢$   $\frac{ل}{م} = -٢$  بالتعويض عن  $①$

$\Leftarrow$  المعادلة تكوير على الصورة  $س^2 - س - (ل + م) = ٠$

أي أنه  $س^2 - س - (\text{مجموع الجذرين}) + \text{حاصل ضرب الجذرين} = ٠$  مهمة

وتحليله أيضا أنه تلعب المعادلة على الصورة  $٠ = (س - ٢)(س - ل)$

مثال ① :- تكوير المعادلة التربيعية التي جذراها :-

$$(٣) \quad ٣س + س^2 - ٢٤س = ٠$$

$$(١) \quad ٥، ٣$$

$$(٤) \quad \frac{س^2 + س - ٢٤س}{س + ١} = \frac{س^2 - ٢٣س}{س - ٢}$$

$$(٢) \quad ٢٧ + س، ٢٧ - س$$

الحل :-

$$(١) \quad \text{مجموع الجذرين} = ٥ + ٣ = ٨ \quad \text{حاصل ضربهم} = ١٥ = ٥ \times ٣$$

:- المعادلة تكوير على الصورة  $س^2 - ٨س + ١٥ = ٠$   $\Leftarrow$  حاصل ضرب الجذرين =

$$\Leftarrow س^2 - ٨س + ١٥ = ٠ \quad \#$$

$$(٢) \quad \text{مجموع الجذرين} = ٢٧ + س، ٢٧ - س = ٤٤ \quad \text{حاصل ضربهم} = (٢٧ - س)(٢٧ + س) = ٥٩١ - س^2$$

$$\Leftarrow س^2 - ٤٤س + ٥٩١ = ٠ \quad \#$$

$$(٣) \quad \text{مجموع الجذرين} = ٣س + س^2 - ٢٤س = ٣س - ٢٣س = -٢٠س \quad \text{حاصل ضربهم} = (٣س - ٢٣س)(٣س + س^2 - ٢٤س) = ١٦س + ٩س^3$$

$$\Leftarrow س^3 - ٢٠س^2 + ١٦س = ٠$$

(٤) نضع كل جذر في أبسط صورة أولًا :- لفرصه أنه الجذر  $ل، م$

$$\Leftarrow ل = \frac{س^2 + س - ٢٤س}{س + ١} = \frac{س^2 + س - ٢٤س}{١ + ١} = \frac{(س - ٢٣)(س - ١)}{(س - ٢٣)(س + ١)} = \frac{س - ١}{س + ١}$$

$$\frac{x^2}{x} = x \leftarrow x = \frac{x^2}{x}$$

$$\frac{x^2 - 10x + 9}{0} = \frac{x^2 - 10x + 9}{1+x} = \frac{(x+9)(x-1)}{(x+9)(x-1)} = \frac{x+9}{x+9} \times \frac{x-1}{x-1} = 1$$

$$x = \frac{10}{0} \leftarrow x = 10$$

$$\boxed{2} = x^2 - 10x + 9 = 10 - 10x + 9 = 19 - 10x \quad \boxed{\text{مفك}} = (x-1) + x = 2 \leftarrow x = 1$$

$$\therefore \text{المعادلة هي } x^2 - 10x + 9 = 0 \leftarrow x = 1 \text{ و } x = 9$$

\* \* \* ترتيب \* \* \*  
\* \* \* كونه المعادلة التربيعية التي جذراها :-

مكتبة وسام  
شربل - شارع حسي مبارك - خلف الثانوية بسات  
01004423597.3943035

$$(1) \quad x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$(2) \quad x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$(1) \quad x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$(2) \quad x^2 - 10x + 9 = 0$$

\* تكويده معادلة تربيعية بعلومية معادلة تربيعية أخرى

مثال ٥ :- إذا كان لـ  $x^2 - 10x + 9 = 0$  جذرا المعادلة  $x^2 - 10x + 9 = 0$  أوجد المعادلة التي

$$\text{جذراها } x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$\begin{aligned} 1 &= p \\ 9 &= q \\ 3 &= r \end{aligned}$$

الحل :- \* تحمل أى مسألة من هذا النوع بالخطوات التالية :-

$$\text{المعادلة المطلوبة :- } * \text{ مجموع الجذرين } = \frac{c}{a} \leftarrow x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$* \text{ حاصل ضربهم } = \frac{c}{a} \leftarrow x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$\text{المعادلة المطلوبة :- } * \text{ مجموع الجذرين } = \frac{c}{a} \leftarrow x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$\text{الحل :- } * \text{ حاصل ضربهم } = \frac{c}{a} \leftarrow x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$\therefore \text{المعادلة المطلوبة هي } x^2 - 10x + 9 = 0$$

\* \* \* ترتيب \* \* \*  
\* \* \* إذا كان لـ  $x^2 - 10x + 9 = 0$  جذرا المعادلة  $x^2 - 10x + 9 = 0$  كونه المعادلة التي

نصير المعطيات الخاصة المستخدمة في هذه المسائل :-

$$\begin{aligned} * \quad \text{لـ} + \text{م} &= \text{لـ} + \text{م} = \text{لـ} + \text{م} \\ * \quad \text{لـ} + \text{م} &= \text{لـ} + \text{م} = \text{لـ} + \text{م} \\ * \quad \frac{\text{لـ} + \text{م}}{\text{لـ} \text{م}} &= \frac{1}{\text{لـ}} + \frac{1}{\text{م}} \\ * \quad \frac{\text{لـ} + \text{م}}{\text{لـ} \text{م}} &= \frac{\text{لـ} + \text{م}}{\text{لـ} \text{م}} = \frac{1}{\text{لـ}} + \frac{1}{\text{م}} \end{aligned}$$

مثال ٥ :- إذا كان ل، م جذرا المعادلة  $x^2 - 5x + 0 = 0$  . أوجد المعادلة التي جذراها

$$\begin{aligned} 1 &= \text{ل} \\ \text{ل} &= \text{م} \\ 0 &= \text{م} \end{aligned}$$

الحل :- المعادلة المطلوبة : \* مجموع الجذور  $\frac{\text{ل} + \text{م}}{\text{ل} \text{م}} = \frac{5}{0}$   $\text{ل} = \text{م} + \text{ل}$

$$* \text{ حاصل ضربهم } = \frac{\text{ل} \text{م}}{\text{ل} \text{م}} = \frac{0}{0} = \text{ل} = \text{م}$$

المعادلة المطلوبة : \* مجموع الجذور  $\frac{\text{ل} + \text{م}}{\text{ل} \text{م}} = \frac{5}{0} = \text{ل} + \text{م} = \text{ل} + \text{م} = 5$   $\text{ل} \text{م} = 0$

$$* \text{ حاصل ضربهم } = \frac{\text{ل} \text{م}}{\text{ل} \text{م}} = \frac{0}{0} = \text{ل} = \text{م}$$

∴ المعادلة المطلوبة هي  $x^2 - 5x + 0 = 0$

مثال ٦ :- إذا كان ل، م جذرا المعادلة  $x^2 - 5x - 0 = 0$  . أوجد المعادلة التي

$$\begin{aligned} 1 &= \text{ل} \\ \text{ل} &= \text{م} \\ 0 &= \text{م} \end{aligned}$$

جذراها  $\frac{1}{\text{ل}} + \frac{1}{\text{م}}$

الحل :- المعادلة المطلوبة : \* مجموع الجذور  $\frac{\text{ل} + \text{م}}{\text{ل} \text{م}} = \frac{5}{0}$   $\text{ل} = \text{م} + \text{ل}$

$$* \text{ حاصل ضربهم } = \frac{\text{ل} \text{م}}{\text{ل} \text{م}} = \frac{0}{0} = \text{ل} = \text{م}$$

المعادلة المطلوبة : \* مجموع الجذور  $\frac{\text{ل} + \text{م}}{\text{ل} \text{م}} = \frac{1}{\text{ل}} + \frac{1}{\text{م}} = \frac{1}{\text{ل}} + \frac{1}{\text{م}} = \frac{1}{\text{ل} \text{م}}$

$$* \text{ حاصل ضربهم } = \frac{\text{ل} \text{م}}{\text{ل} \text{م}} = \frac{1}{\text{ل} \text{م}} = \frac{1}{\text{ل} \text{م}} = \frac{1}{\text{ل} \text{م}}$$

∴ المعادلة المطلوبة هي  $x^2 - 5x + 0 = 0$

مثال ٥ :- إذا كان لـ ٢ هاجزا المعادلة  $x^2 - 3x - 1 = 0$  كونه المعادلة التربيعية

التي جذراها (١)  $\frac{1}{2} \text{ و } \frac{3}{2}$  (٣)  $\frac{1}{2} \text{ و } \frac{3}{2}$

(٢)  $\frac{1}{2} \text{ و } \frac{3}{2}$

الحل :-

المعادلة المعطاة : \* مجموع الجذور  $\frac{c}{a} = \frac{-3}{1} = -3$   $\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = -3$

\* حاصل ضربهم  $\frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$   $\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = -1$

← (١) المعادلة المطلوبة : \* مجموع الجذور  $\frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$   $\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = -1$   
 $\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = -1$

\* حاصل ضربهم  $\frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$   $\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = -1$

∴ المعادلة المطلوبة هي  $x^2 - 3x - 1 = 0$

← (٢) المعادلة المطلوبة : \* مجموع الجذور  $\frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$   $\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = -1$

\* حاصل ضربهم  $\frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$   $\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = -1$

∴ المعادلة المطلوبة هي  $x^2 - 3x - 1 = 0$

← (٣) المعادلة المطلوبة : \* مجموع الجذور  $\frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$   $\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = -1$

$\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = -1$

\* حاصل ضربهم  $\frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$   $\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = -1$

$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = -1$

∴ المعادلة المطلوبة هي  $x^2 - 3x - 1 = 0$

\* \* \* (١) إذا كان لـ ٢ هاجزا المعادلة  $x^2 + 3x - 5 = 0$  كونه المعادلة التربيعية

التي جذراها لـ ٢

(٢) إذا كان لـ ٢ هاجزا المعادلة  $x^2 + 3x - 5 = 0$  كونه المعادلة التربيعية

التي جذراها :- (١)  $\frac{1}{2} \text{ و } \frac{3}{2}$  (٢)  $\frac{1}{2} \text{ و } \frac{3}{2}$

مثال ٦ :- إذا كان  $3 + 2\sqrt{3} + d$  لها جذري المعادلة  $x^2 - 11x + 7 = 0$ .

كوتر المعادلة التي جذراها  $d, 3$

الحل :- المعادلة المعطاة : \* مجموع الجذور  $= \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{7}{1} = 11 \Rightarrow 3 + 2 + 3 + d = 11 \Rightarrow d = 3$

$$3 + d = 5 \Rightarrow 3 + 3 = 6$$

$$7 = (3+2)(3+d) \Rightarrow \frac{7}{3} = \text{حاصل ضرب الجذور}$$

$$c = (3+d)3 + 3d \Rightarrow 7 = 9 + 3d + 3d + 3d \Rightarrow$$

$$7 = 9 + 9d \Rightarrow 7 - 9 = 9d \Rightarrow -2 = 9d \Rightarrow d = -\frac{2}{9}$$

∴ المعادلة المطلوبة التي جذراها  $d, 3$  هي  $x^2 - 11x + 7 = 0$ .

$$x^2 - 11x + 7 = 0$$

\* \* \* \* \*  
مثال ٧ :- إذا كان  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  لها جذري المعادلة  $x^2 - 11x + 7 = 0$ .  
كوتر المعادلة التي جذراها  $d, 3$

مثال ٨ :- إذا كان  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  لها جذري المعادلة  $x^2 - 11x + 7 = 0$ .  
احتمال حاصل ضرب جذري المعادلة  $x^2 - 11x + 7 = 0$  أو جذريه

الحل :- بفرضه أنه جذري المعادلة  $x^2 - 11x + 7 = 0$  هما  $d, 3$

$$\begin{array}{l} 1 = p \\ 3 = q \\ 7 = r \end{array}$$

$$3 + d = 11 \Rightarrow d = 8$$

∴ الفرضه بغيره  $d, 3$  ليساوي ثلثه احتمال حاصل ضرب جذري المعادلة  $x^2 - 11x + 7 = 0$ .

$$\begin{array}{l} 1 = p \\ 3 = q \\ 7 = r \end{array}$$

$$3 - d = 11 \Rightarrow d = -8$$

$$3 - d = 11 \Rightarrow d = -8 \Rightarrow 3 + (-8) = -5 \Rightarrow 3 - 8 = -5$$

$$9 = 3^2 = (-8)^2 = 64 \Rightarrow 9 = 64 \Rightarrow 9 - 64 = -55 \Rightarrow 9 - 64 = -55$$

$$16 = 4^2 = (-11)^2 = 121 \Rightarrow 16 = 121 \Rightarrow 16 - 121 = -105 \Rightarrow 16 - 121 = -105$$

مثال ٨) أوجد المعادلة التربيعية التي جذورها ضعف جذري المعادلة التربيعية

$$\begin{array}{l|l} c = p \\ \sqrt{-} = b \\ 0 = q \end{array}$$

$$x^2 - 5x + 0 = 0$$

الحل :- بفرضه جذري المعادلة المعطاه هما  $m, l$

$$x = \frac{0}{-5} = m + l \iff \frac{0}{-5} = m + l$$

$$x = m + l \iff \frac{0}{-5} = m + l$$

∴ المعادلة المطلوبة جذورها ضعف جذري المعادلة المعطاة ∴ جذورها هم  $2m, 2l$

$$\text{مجموع الجذرين} = 2m + 2l = 2(m + l) = 2 \times \frac{0}{-5} = 0$$

$$\text{حاصل ضربهم} = 2m \times 2l = 4ml = 4 \times \frac{0}{-5} = 0$$

$$\therefore \text{المعادلة المطلوبة لها } x^2 - 0x + 0 = 0 \quad \#$$

مثال ٩) أوجد المعادلة التربيعية التي كل من جذريها يزيد بمقدار ١ عن كل من

$$\text{جذري المعادلة } x^2 - 5x + 9 = 0$$

الحل :- بفرضه جذري المعادلة المعطاه هما  $m, l$

$$\begin{array}{l|l} 1 = p \\ \sqrt{-} = b \\ 9 = q \end{array}$$

$$x = \frac{5}{2} = m + l \iff \frac{5}{2} = m + l$$

$$x = m + l \iff \frac{5}{2} = m + l$$

∴ المعادلة المطلوبة جذورها يزيد بمقدار ١ عنه جذري المعادلة المعطاه

$$\therefore \text{جذري المعادلة المطلوبة هما } m+1, l+1$$

$$\text{مجموع الجذرين} = m+1 + l+1 = m+l+2 = \frac{5}{2} + 2 = \frac{9}{2}$$

$$\text{حاصل ضربهم} = (m+1)(l+1) = ml + m + l + 1 = \frac{0}{-5} + \frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2}$$

$$\therefore \text{المعادلة المطلوبة لها } x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{7}{2} = 0 \quad \#$$



تمارين على "تكوين المعادلة التربيعية من علم جذراها"

□ اكمل ما يأتي ..

(١) المعادلة التي جذراها ٣ - ٥ هـ ..... هـ

(٢) المعادلة التي جذراها  $\frac{1}{4}$  ،  $\frac{3}{4}$  هـ ..... هـ

(٣) المعادلة التي مجموع جذريها = ٣ وحاصل ضربها = - ٥ هـ ..... هـ

(٤) إذا كان ل هـ هـ جذرا المعادلة  $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$  فانه ب = ..... هـ

(٥) إذا كان ل هـ هـ جذرا المعادلة  $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$  فانه ل + م = ..... هـ ل + م = ..... هـ

□ كونه المعادلة التربيعية التي جذراها :

(١)  $x^2 - ٤x + ٤ = ٠$  (٤)  $x^2 - ١x + ٣ = ٠$

(٢)  $x^2 + ٤x + ٤ = ٠$  (٥)  $x^2 - ٣x + ٣ = ٠$

(٣)  $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$  (٦)  $x^2 + ٣x + ٣ = ٠$

□ (١) إذا كان ل هـ هـ جذرا المعادلة  $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$  كونه المعادلة التي جذراها ل هـ م

(٢) إذا كان ل هـ هـ جذرا المعادلة  $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$  كونه المعادلة التي جذراها ل هـ م + ٢

(٣) إذا كان ل هـ هـ جذرا المعادلة  $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$  كونه المعادلة التي جذراها ل هـ م - ١

(٤) إذا كان ل هـ هـ جذرا المعادلة  $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$  كونه المعادلة التي جذراها ل هـ م +  $\frac{1}{2}$

(٥) إذا كان ل هـ هـ جذرا المعادلة  $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$  كونه المعادلة التي جذراها ل هـ م +  $\frac{1}{3}$

(٦) إذا كان ل هـ هـ جذرا المعادلة  $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$  كونه المعادلة التي جذراها ل هـ م +  $\frac{1}{4}$

(٧) إذا كان ل هـ هـ جذرا المعادلة  $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$  كونه المعادلة التي جذراها ل هـ م +  $\frac{1}{5}$

(٨) إذا كان ل هـ هـ جذرا المعادلة  $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$  كونه المعادلة التي جذراها ل هـ م +  $\frac{1}{6}$

(٩) إذا كان ل هـ هـ جذرا المعادلة  $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$  كونه المعادلة التي جذراها ل هـ م +  $\frac{1}{7}$

(١٠) إذا كان ل هـ هـ جذرا المعادلة  $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$  كونه المعادلة التي جذراها ل هـ م +  $\frac{1}{8}$

(١١) إذا كان ل هـ هـ جذرا المعادلة  $x^2 - ٥x + ٥ = ٠$  كونه المعادلة التي جذراها ل هـ م +  $\frac{1}{9}$

(١٢) إذا كان  $x^2 + 3x + 2 = 0$  فاحسب جذري المعادلة  $x^2 - 11x + 3 = 0$ . كونه المعادلة التي جذريها  $x, y$

(١٣) إذا كان  $x^2 - 2x + 1 = 0$  فاحسب جذري المعادلة  $x^2 + 5x + 7 = 0$ . كونه المعادلة التي جذريها  $x, y$

٤ كونه المعادلة التربيعية التي كل من جذريها يساوي نصف نظيره من جذري المعادلة  $x^2 - 5x + 7 = 0$ .

٥ كونه المعادلة التربيعية التي كل من جذريها يساوي مربع نظيره من جذري المعادلة  $x^2 + 3x - 5 = 0$ .

٦ إذا كان  $x^2 - 5x + 3 = 0$  فاحسب جذري المعادلة التربيعية  $x^2 + 3x + 5 = 0$ .  
يساوي ضعف حاصل ضرب جذري المعادلة  $x^2 + 3x + 5 = 0$ . أو جذرية  $x^2 - 5x + 3 = 0$ .

٧ إذا كان  $x^2 - 5x + 3 = 0$  فاحسب جذري المعادلة  $x^2 + 3x + 5 = 0$ .  
فاحسب جذري المعادلة  $x^2 - 5x + 3 = 0$ . أو جذرية كل من  $x, y$

ثم كونه المعادلة التي جذريها  $(x+y), (x-y)$

٨ إذا كان  $x^2 - 5x + 3 = 0$  فاحسب جذري المعادلة  $x^2 - 3x - 5 = 0$ .

أو جذرية المعادلة التي جذريها  $x, y$

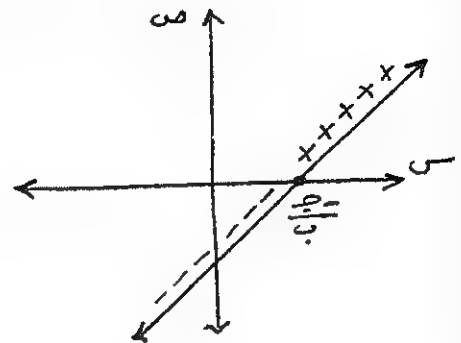
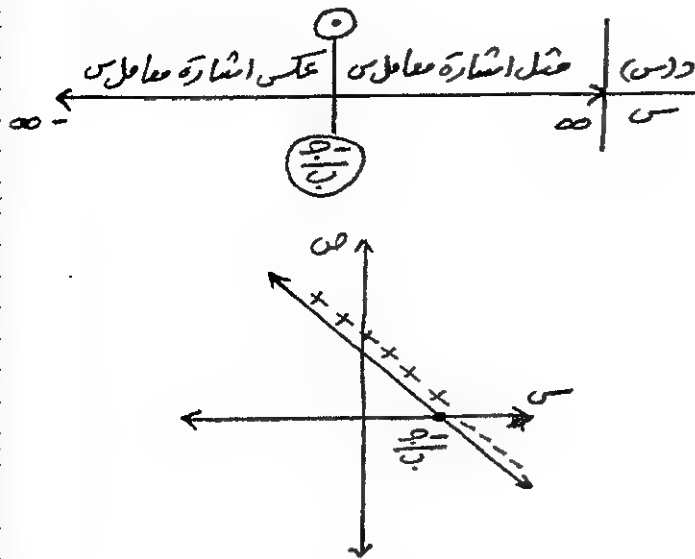
\* المقصود بمبحث إشارة الدالة هو معرفة الفقرات التي تكون فيط الدالة موجبة والفقرات التي تكون فيط الدالة سالبة والفقرات التي تكون فيط الدالة تساوي صفر.

•  $\gamma_0 = (s)$  (c)

• (س) = •      عندما س =  $\frac{س}{س}$       اُس س =  $\frac{س}{س}$

وعليه أنه لعبر عن كل ما يلي :-

والشكل التالي يوضح ذلك بيانياً :-



مثال ٥ اجبت إشارة كل من الدوال الآتية :-

(١)  $(x) = 1 + x$

(٢)  $(x) = x^2 - 2$

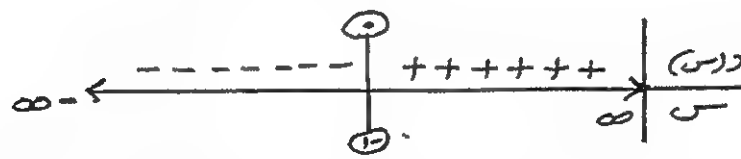
يوضع  $(x) = 0$

الحل :- (١)  $1 + x = 0$

$x = -1$

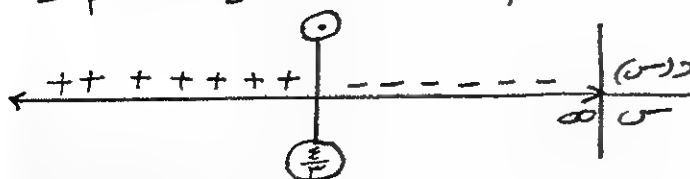
مكتبة وسام  
ش.م. شارع حسني مبارك، خلف الثانوية بنات  
01004423597-3943035

∴  $(x)$  تكون موجبة (عند إشارة معامل  $x$ ) عند  $x < -1$  أي  $x \in (-\infty, -1)$   
 $(x)$  سالبة (عند إشارة معامل  $x$ ) عند  $x > -1$  أي  $x \in (-1, \infty)$   
 $(x) = 0$  عند  $x = -1$  أي  $x \in \{-1\}$



(٢) ∴  $(x) = x^2 - 2 = 0$  يوضع  $(x) = 0$  ∴  $x^2 - 2 = 0$  ∴  $x = \pm \sqrt{2}$

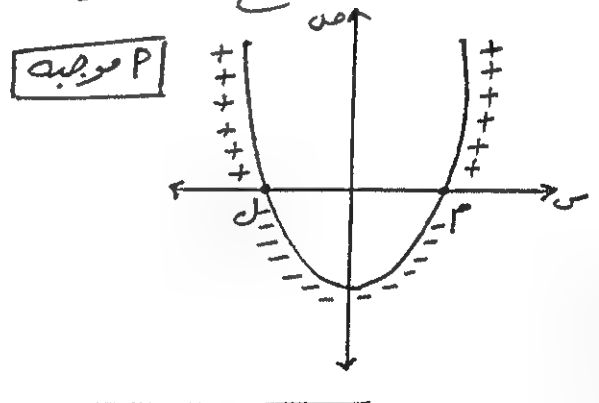
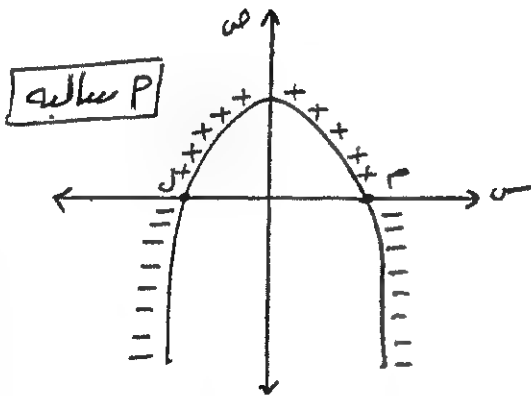
∴  $(x)$  سالبة (عند إشارة معامل  $x$ ) عند  $x < \sqrt{2}$  أي  $x \in (-\infty, \sqrt{2})$   
 $(x)$  موجبة (عند إشارة معامل  $x$ ) عند  $x > \sqrt{2}$  أي  $x \in (\sqrt{2}, \infty)$   
 $(x) = 0$  عند  $x = \pm \sqrt{2}$



(۱۰)  $d(s) = s - 1$       (۱۱)  $d(s) = s - 3$

لتعبير إشارة الدالة التبريرية  $(S) = P + S + B + J$  .  $P \neq 0$  .  
 توجد معزى المعادلة  $P + S + B + J = 0$  . وهو  $B - P + J$  فإذا كانه :-  
 (1)  $B - P + J < 0$  . فإنه يكونه للمعادلة جذر له حقيقتيه  $B$  و  $J$  ، فإنه  $L = 2$   
 ويكونه إشارة الدالة كمالى :-

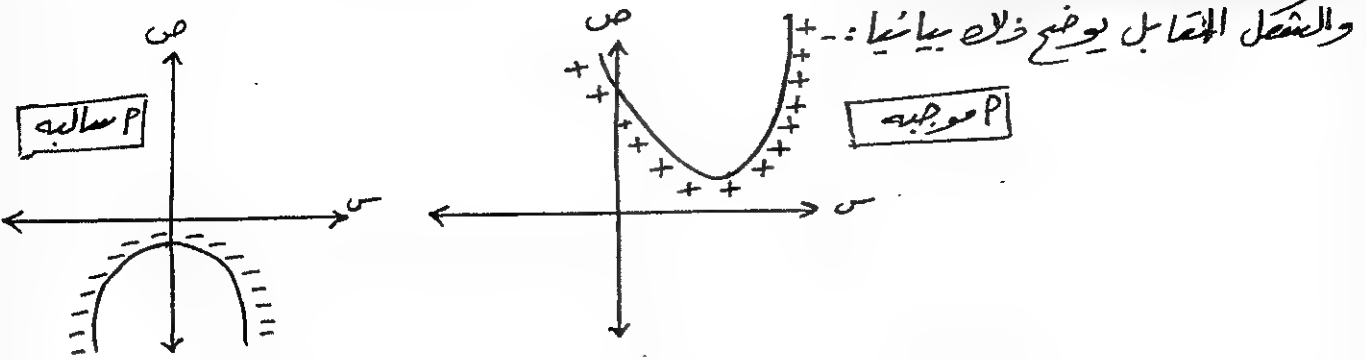
• (دوس) = عتدا سے ۛ جملہ ۛ  
 وعلیہ اہ نصیر غفرلہ کما یشاء :-



← (۲)  $\infty - \infty$  ج. > . بخانه لا توجد جذور حقيقية للمعادلة وتكون إشارة الدالة كما يلي :-

• (درس) مثل إشارة معامل  $\infty$  كل  $\infty$  ع

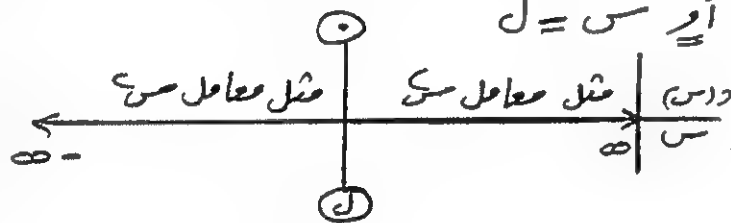
وتكون أنه فخر منها كما يلي :-



← (٣)  $\Delta - 4P < 0$  . فإنه يكون للمعادلة جذران متساويان ويكون صفره أنه كل من  $س$  و  $ل$  وبالتالي تكون إشارة الدالة كما يلي :-

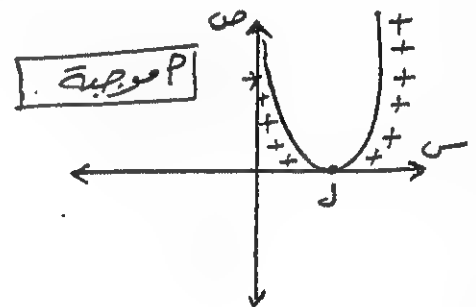
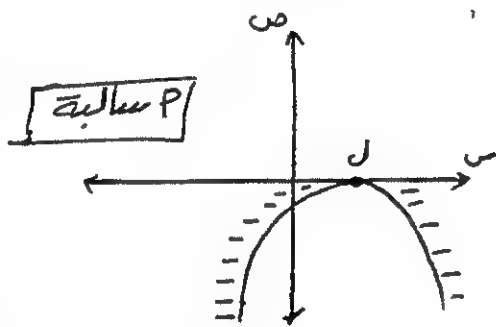
• (درج) مثل إشارة معامل  $س$  عندما  $س \in ]ل, ل[$  أو  $س \neq ل$

• (درج)  $= 0$  عندما  $س \in ]ل, ل[$  أو  $س = ل$



وبذلك أنه نضع عنها كما يلي :-

والشكل المقابل يوضح ذلك بيانياً :-



مثال (٥) عيبر إشارة كل من الدوال الآتية :-

(١) (درج)  $س - ٥س + ٤$  (٣) (درج)  $س - ٨س + ١٦$

(٢) (درج)  $س = ١ + س$

الحل :- (١) (درج)  $س - ٥س + ٤$

$\Delta - 4P < 0$   $\Delta - 4P = ٢٥ - ١٦ = ٩ < ٠$

∴ الجذرين حقيقتان مختلفتان ← نوجد لها وذلك بوضع (درج)  $= 0$

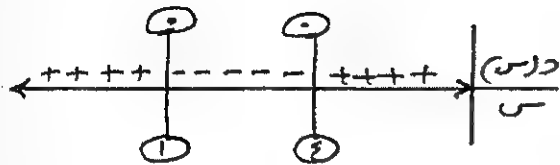
$١ = P$   
 $٠ = ص$   
 $ج = س$

$$\boxed{1=s} \text{ أو } \boxed{2=s} \Leftarrow 0 = (1-s)(2-s) \Leftarrow s = 1 \text{ أو } s = 2$$

∴ درس تكون موجبة (مثل) عندما  $s \in [1, 2]$

درس تكون سالبة (عكس) عندما  $s \in [2, 1]$

درس  $= 0$  عندما  $s \in \{1, 2\}$



وتكتب اختبار على خط الأعداد ←

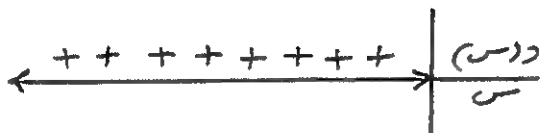
$$\begin{array}{l} 1 = p \\ 1 = 0 \\ 1 = 0 \end{array}$$

$$(2) \text{ درس} = s - s + 1$$

$$\therefore \text{ درس} - p = 1 - 1 = 0 \Rightarrow 1 - 1 = 0$$

∴ المعادلة ليس لها جذور حقيقية

∴ درس تكون موجبة لكن  $s \in [1, 2]$



$$1 = p$$

$$1 = 0$$

$$1 = 0$$

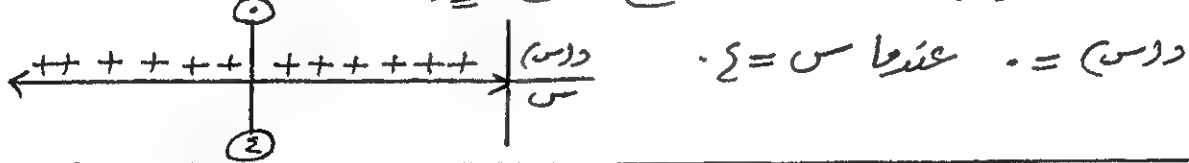
$$(3) \text{ درس} = s - s + 16$$

$$\therefore \text{ درس} - p = 16 - 16 = 0 \Rightarrow 16 - 16 = 0$$

∴ المعادلة لها جذور حقيقية متساوية  $s = 4$  نوجد لها وذل بوضع درس  $= 0$

$$\boxed{2=s} \Leftarrow 0 = (2-s)(2-s) \Leftarrow s = 2$$

∴ درس تكون موجبة عندما  $s \in [2, 2]$  أو  $s = 2$



\* \* \* \* \*  
نكتب اختبار على خط الأعداد ∴

$$(1) \text{ درس} = 10 - s$$

$$(3) \text{ درس} = 10 - s$$

$$(2) \text{ درس} = 3 - s$$

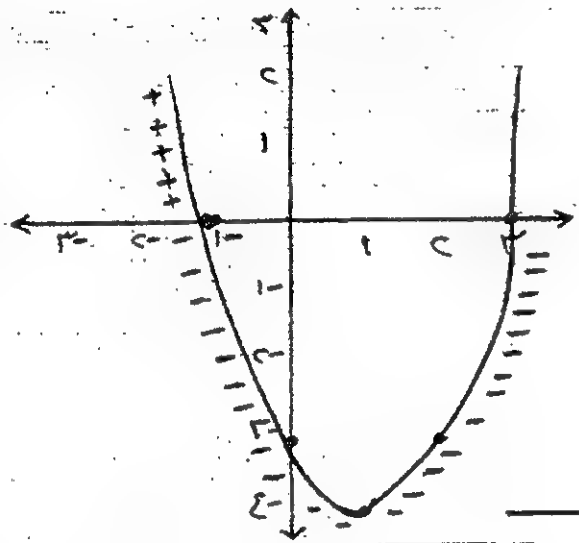
مثال ② :- مثل بيانيًا د حيث  $د(س) = س^2 - ٣س - ١$  ثم عيّر الدرس إشارة الدالة  
الحل :- يمكنه إيجاد نقطة رأس المنحنى طالعًا لا يوجد فترة التقصير فيها

$$\text{الاحداثي السيني} = \frac{c}{1 \times c} = \frac{b}{2a} = \frac{-3}{2 \times 1} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{الاحداثي الصادي} = د(-\frac{3}{2}) = (-\frac{3}{2})^2 - 3(-\frac{3}{2}) - 1 = \frac{9}{4} + \frac{9}{2} - 1 = \frac{9}{4} + \frac{9}{2} - \frac{4}{4} = \frac{9+18-4}{4} = \frac{23}{4}$$

∴ نقطة رأس المنحنى هي  $(-\frac{3}{2}, \frac{23}{4})$  عليه عمل جدول كما يلي .

س	-١	٠	①	٢	٣
د(س)	٠	٣-	②	٣-	٠



عند الدرس نلاحظ أنه :-

د(س) موجبة عندما س  $\in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$

د(س) سالبة عندما س  $\in (-1, 3)$

د(س) = ٠ عندما س  $\in \{-1, 3\}$

مثال ③ :- اثبت أنه لجميع قيم س  $\in \mathbb{R}$  يكون جذر المعادلة  $س^2 - ٣س - ١ = ٠$  حقيقيًا مختلفين .

الحل :- يكون للمعادلة جذرين حقيقيين مختلفين إذا كان المميز  $\Delta = ٣^2 - 4(1)(-1) = 9 + 4 = 13 > ٠$

$$\therefore \Delta = ١٣ > ٠ \Rightarrow \text{المميز} = ١٣ > ٠ \Rightarrow \text{المميز} = ١٣ > ٠$$

$$c = p$$

$$d = -b$$

$$e = -c$$

$$١ + (١٣ + ٣س - ١) = ٤س + ١٣ = ١٣ + ٤س$$

$$١ + (٤ - ١) = ٤س + ١٣ = ١٣ + ٤س$$

∴ المعادلة لها جذران حقيقيان مختلفان .

\* \* \* \* \*  
\* \* \* \* \*  
اثبت أنه لجميع قيم س  $\in \mathbb{R}$  يكون جذر المعادلة  $س^2 - ٣س - ١ = ٠$  حقيقيًا مختلفين .



## تمارين على "إشارة الدالة"

■ أمل ما يأتي :-

- (١) الدالة  $D(x) = -x + 5$  إشارة على ..... في .....
- (٢) الدالة  $D(x) = x - 2$  موجبة في الفترة ..... وسالبة في الفترة .....
- (٣) الدالة  $D(x) = x^2 - 3$  موجبة في الفترة ..... وسالبة في الفترة .....
- (٤) الدالة  $D(x) = x^2 - 6x + 9$  موجبة في الفترة .....
- (٥) الدالة  $D(x) = (x-1)(x+2)$  موجبة في الفترة .....
- (٦) الدالة  $D(x) = (x-3)^2$  تكون موجبة لجميع قيم  $x$  عدا .....
- (٧) الدالة  $D(x) = x^2$  تكون موجبة في الفترة .....

(٨) في الشكل المقابل : دالة من الدرجة الأولى

.....  
د(س) موجبة في الفترة ..... وسالبة في الفترة .....

(٩) في الشكل المقابل : دالة من الدرجة الثانية

د(س) = 0 عند  $x = 0$  .....

د(س) < 0 عند  $x = 0$  .....

د(س) > 0 عند  $x = 0$  .....

■ ابحث إشارة كل من الدوال الآتية :-

(٩) د(س) =  $x^2$

(٥) د(س) =  $x - 5$

(١) د(س) =  $x^2 - 1$

(١٠) د(س) =  $(x-2)(x+3)$

(٦) د(س) =  $x^2 - 3x + 2$

(٢) د(س) =  $x^2 - 4x + 4$

(١١) د(س) =  $(x-3)^2$

(٧) د(س) =  $x^2 - 8x + 16$

(٣) د(س) =  $x^2 - 6x + 9$

(١٢) د(س) =  $x^2 - 1$

(٨) د(س) =  $x^2 - 10x + 25$

(٤) د(س) =  $x^2 - 3$

■ (١) ارسم مخطط الدالة د(س) =  $x^2 - 9$  في الفترة  $[-3, 3]$  وعده الرسم ابحث إشارة الدالة

(١) اسم مفتاح الدالة  $D(S) = S + S + S$  في الفترة  $[5, 3]$  والبحث إشارة  $S$

❑ إذا كانت  $D(S) = S - 9$  ،  $S = 1$  . أو هـ الفترة التي تكونه في  $D$  ، ولها نفس الإشارة

❑ إذا كانت  $D(S) = S + 1$  ،  $S = 1$  في هـ الفترة التي تكونه في  $D$  ، ولها نفس الإشارة .

❑ إذا كانت  $D(S) = S - 3$  ،  $S = 7$  في هـ الفترة التي تكونه في  $D$  ، ولها نفس الإشارة .

❑ أثبت أنه لجميع قيم  $S$  يكون جذر المعادلة  $S + S + S = 0$  حقيقيين مختلفين .

❑ في الفترة من عام ١٩٩٠ إلى ٢٠١٠ كان إنتاج أستراليا من الذهب مقدراً بالآلاف أوقية يتحدد بالدالة  $D(S) = 100 - 96S + 10S^2$  حيث  $S$  عدد السنوات ،  $D(S)$  إنتاج الذهب .

أولاً :- البحث إشارة دالة الإنتاج  $D$  .

ثانياً :- خلال الأعوام من ١٩٩٠ إلى ٢٠١٠ في أي الأعوام كان إنتاج الذهب يتناقص ؟  
ثالثاً :- خلال الأعوام من ١٩٩٠ إلى ٢٠١٠ في أي الأعوام كان إنتاج الذهب يتزايد ؟

(٧) "متباينة الدرجة الثانية من مجهول واحد"

\* نعلم أنه متباينة الدرجة الأولى من مجهول واحد يعني أنه توجد جميع قيم المجهول الذي يحقق هذه المتباينة من صورة فترة .

\* حل المتباينة التربيعية :- يعني إيجاد جميع قيم المجهول التي تحقق هذه المتباينة  $\Leftarrow$  خطوات حل متباينة الدرجة الثانية من مجهول واحد :-

(١) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بهذه المتباينة .

(٢) ندرس إشارة الدالة التربيعية ونضبط على فط الأعداد .

(٣) نجد الفترات التي تحقق المتباينة .

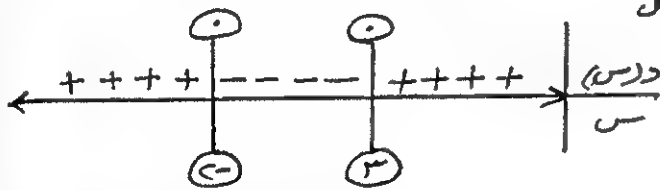
مثال ١ :- حل المتباينة  $x^2 - 5x + 6 < 0$  .

الحل :- الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة هي  $D(x) = x^2 - 5x + 6$  .  
نبحث إشارة هذه الدالة كما سجد شرحه من الدرس السابق

نضع  $D(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) = 0$

ومنظر  $\boxed{x=2}$  ،  $\boxed{x=3}$  ونلاحظ أنه الجذرين حقيقيين مختلفين

∴  $D(x)$  تكون إشارة على كالمين من الشكل



عبر الرسم :-

مجموعة حل المتباينة  $= ]2, 3[$

أو  $]2, 3[$  وهذه الفترة هي التي تحقق

مثال ٢ حل المتباينة  $(x-1)(x-5) \geq 0$

الحل :-  $(x-1)(x-5) \geq 0 \Rightarrow x-1 \geq 0 \text{ و } x-5 \geq 0$  أو  $x-1 \leq 0 \text{ و } x-5 \leq 0$

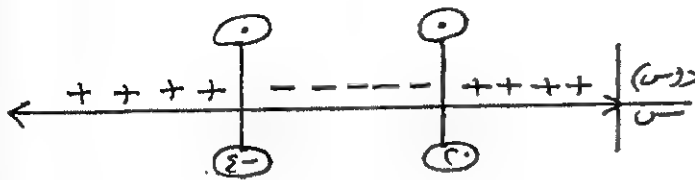
$$\therefore -s - c + 1 \geq 9 - 2s \iff s \leq -c + 8 \geq 0$$

∴ الدالة التربيعية المرتبطة بالمعادلة لها دس =  $-c + 8$

$$\therefore 0 = -c + 8 = 8 - x \times 2 - 2 = 26 - c \iff c = 26$$

"الجذران حقيقيان مختلفان"

$$\text{بوضع دس} = 0 \iff s \leq -c + 8 = 0 \iff (s - 8)(s + 8) = 0$$



$$\text{ومنها } \boxed{s = -8} \text{ و } \boxed{s = 8}$$

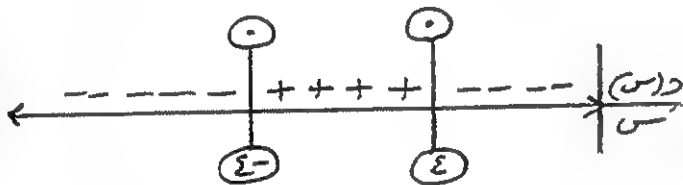
∴ دس تكونه راشار على كالمين في الشكل

$$\therefore \text{مجموعة حل المعادلة} = [-8, 8]$$

$$\text{مثال ٣} \therefore \text{حل المعادلة } 16 = s$$

الحل: ∴ الدالة المرتبطة بالمعادلة لها دس =  $16 = s$

$$\text{بوضع دس} = 0 \iff s = 16 \iff 1 - x \iff s = 16 - c \iff (s - 16)(s + 16) = 0$$



$$\text{ومنها } \boxed{s = 16} \text{ و } \boxed{s = -16}$$

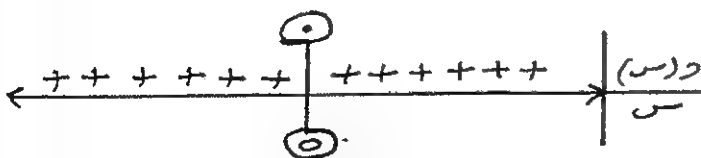
∴ دس تكونه راشار على كالمين بالشكل

$$\therefore \text{مجموعة حل المعادلة} = [-16, 16]$$

$$\text{مثال ٤} \text{ حل المعادلة } 20 - s + s = 0$$

$$\text{الحل: } \therefore 20 - s + s = 0 \iff 1 - x \iff s = 20 + s = 0$$

$$\therefore \text{الدالة التربيعية لها دس} = 20 + s = 0 \iff (s - 20)(s + 20) = 0$$



$$\text{ومنها } \boxed{s = 20}$$

∴ دس تكونه راشار على كالمين بالشكل

$$\therefore \text{مجموعة حل المعادلة} = [20, 20]$$

مثال ٥ :- حل المتباينة  $s + 2 < 0$ .

الحل :- الرالة التربيعية لها  $(s) = s + 2$

$\therefore s - 2 = 0 = (s - 2)(s + 2)$  الجذران غير حقيقيين

$\therefore (s)$  تكون إشارة  $s$  كما بالمثل  $\frac{(s)}{s}$

مجموعة حل المتباينة  $s = 2$

ما التعديل الذي يجب فعله في المتباينة السابقة حتى تصبح  $s = 2$  ؟

### تمارين على "متباينة الدرجة الثانية في مجهول واحد"

حل المتباينات الآتية

- (١)  $s + 5 - 8 < 0$
- (٢)  $s - 1 \geq 0$
- (٣)  $7 + s - 2 - 5 > 0$
- (٤)  $s - 2 - 5 + 2 < 0$
- (٥)  $5 - 2 > 0$
- (٦)  $s \geq 9$
- (٧)  $3 - s \geq 11 + s + 2$
- (٨)  $3 - 5 - 5 < s$
- (٩)  $s + 5 \geq 1$
- (١٠)  $s (s + 5) - 3 \geq 0$
- (١١)  $(s + 3) - 10 > 3 - (s + 3)$
- (١٢)  $0 - 5 \geq s$
- (١٣)  $s \leq 6 - 9$
- (١٤)  $0 - (s - 5) \geq 5$
- (١٥)  $(s + 1) \geq 2 (5 - 1)$

## تعارين عامة

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١) مجموعة حل المعادلة  $s^2 - 6s + 9 = 0$  في ح هي:
 

(أ)  $\{3\}$  (ب)  $\{3\}$  (ج)  $\{3, 3\}$  (د)  $\emptyset$
- ٢) مجموعة حل المعادلة  $s^2 + 4 = 0$  هي:
 

(أ)  $\{2\}$  (ب)  $\{2\}$  (ج)  $\{2, 2\}$  (د)  $\{2, -2\}$
- ٣) أبسط صورة للمقدار  $(1-t)$  هو:
 

(أ)  $-4$  (ب)  $4$  (ج)  $-4t$  (د)  $4t$
- ٤) إذا كان جذرا المعادلة  $s^2 - 4s + k = 0$  حقيقيين ومختلفين فإن:
 

(أ)  $k < 4$  (ب)  $k > 4$  (ج)  $k = 4$  (د)  $k \leq 4$
- ٥) إذا كان جذرا المعادلة  $s^2 - 12s + m = 0$  متساويين فإن م تساوي:
 

(أ)  $36$  (ب)  $6$  (ج)  $6$  (د)  $36$
- ٦) المعادلة التربيعية التي جذراها  $2$  و  $3$  هي:
 

(أ)  $s^2 + 4s + 13 = 0$  (ب)  $s^2 - 4s + 13 = 0$  (ج)  $s^2 + 4s - 13 = 0$  (د)  $s^2 - 4s - 13 = 0$
- ٧) إذا كانت د:  $[2, 4]$  ← ح حيث د(س) =  $2 - s$  فإن إشارة الدالة د سالبة في:
 

(أ)  $[2, 2]$  (ب)  $[2, 2]$  (ج)  $[4, 2]$  (د)  $[4, 2]$
- ٨) إذا كان أحد جذري المعادلة  $s^2 - (2+m)s + 3 = 0$  معكوساً جمعياً للجذر الآخر فإن م تساوي:
 

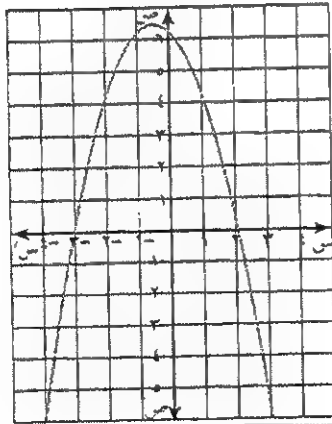
(أ)  $3$  (ب)  $-3$  (ج)  $2$  (د)  $-2$
- ٩) إذا كان أحد جذري المعادلة  $s^2 + 7s + k = 0$  هو المعكوس الضربي للجذر الآخر فإن ك تساوي:
 

(أ)  $-7$  (ب)  $2$  (ج)  $2$  (د)  $7$
- ١٠) مجموعة حل المتباينة  $s^2 + s - 2 > 0$  هي:
 

(أ)  $[1, 2]$  (ب)  $[1, 2]$  (ج)  $[-2, -1]$  (د)  $[-2, -1]$

ثانياً: يمثل الشكل المقابل التمثيل البياني لدالة تربيعية د

١١) أكمل ما يأتي:



- أ) مدى الدالة د هو .....
- ب) القيمة العظمى للدالة د = .....
- ج) نوع جذري المعادلة د(س) = ٠ هو .....
- د) مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠ هي .....
- هـ) د(س) < ٠ عندما س .....
- و) د(س) > ٠ عندما س .....
- ز) د(س) = ٠ عندما س = .....

## تمارين عامة

١٢ اكتب قاعدة الدالة التي تمر بالنقاط  $(١، ٢)$  ،  $(٠، ٢)$  ،  $(٠، ٣)$

١٣ تفكير ناقد:

أ اكتب نقاط تقاطع منحنى الدوال التي قاعدتها  $ص = س^٢$  ،  $ص = س$

ب اكتب نقاط تقاطع منحنى الدوال التي قاعدتها  $ص = -س^٢$  ،  $ص = -س$  ماذا تلاحظ؟ فسر إجابتك.

ثالثاً: أجب عن الأسئلة الآتية

١٤ بين نوع جذري كل معادلة مما يأتي، ثم أوجد مجموعة حل كل معادلة.

أ  $س^٢ - ٢س = ٠$       ب  $(س - ١)^٢ = ٤$       ج  $س^٢ - ٦س + ٩ = ٠$

د  $س^٢ + ٣س - ٢٨ = ٠$       هـ  $٦س(س - ١) = ٦ - س$

١٥ حل المعادلات الآتية باستخدام القانون العام مقرباً الناتج لأقرب رقمين عشريين.

أ  $س^٢ + ٤س + ٢ = ٠$       ب  $س^٢ - ٣(س - ٢) = ٥$

١٦ أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية في مجموعة الأعداد المركبة.

أ  $س^٢ + ٩ = ٠$       ب  $س^٢ + ٢س + ٢ = ٠$       ج  $س^٢ + ٤س + ٥ = ٠$

١٧ أوجد قيمة أ، ب في كل مما يأتي:

أ  $(٣ - ٧) - (٢ + ت) = أ + ب ت$       ب  $(٥ - ٢)(٣ + ت) = أ + ب ت$   
ج  $أ + ب ت = \frac{١٠}{٢ + ت}$       د  $أ + ب ت = \frac{٤ - ٦}{٢ - ت}$

١٨ أوجد قيمة م في كل مما يأتي:

أ إذا كان جذر المعادلة  $س^٢ + م س + ١٨ = ٠$  متساويين  
ب إذا كان أحد جذري المعادلة  $س^٢ + ٣س + ك = ٠$  ضعف الجذر الآخر

١٩ ابحث إشارة الدالة د في كل مما يأتي:

أ د(س) =  $س^٢ - ٢س - ٨$       ب د(س) =  $٤ - ٣س - س^٢$

٢٠ أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية:

أ  $س^٢ - س - ١٢ < ٠$       ب  $س^٢ - ٧س + ١٠ \geq ٠$

## اختبار الوحدة

أولاً: الاختيار من متعدد :

١) مجموعة حل المعادلة  $s^2 - 4s - 4 = 0$  في ح هي:

- أ  $\{-2\}$       ب  $\{2\}$       ج  $\{-2, 2\}$       د  $\emptyset$

٢) حل المتباينة  $s^2 + 9 < 6s$  في ح هي:

- أ ح      ب ح  $\{-2\}$       ج  $[-2, 3]$       د ح  $[-3, 2]$

٣) جذرا المعادلة  $s^2 - 5s + 3 = 0$  :

- أ حقيقتان متساويتان      ب حقيقتان مختلفتان      ج مركبان      د مركبان ومترافقان

٤) المعادلة التربيعية التي جذراها  $(1 + t)$ ،  $(1 - t)$  هي:

- أ  $s^2 - 2s + 2 = 0$       ب  $s^2 + 2s - 2 = 0$       ج  $s^2 + 2s + 2 = 0$       د  $s^2 - 2s - 2 = 0$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية

٥) إذا كان  $(3 + i)s^2 + (1 - 2)s + 4 = 0$  فأوجد قيمة  $i$  في كل من الحالات الآتية:

- أ أحد جذري المعادلة معكوس جمعي للجذر الآخر.

ب مجموع جذري المعادلة يساوي ٦.

٦) أ إذا كان  $\frac{2}{m}$ ،  $\frac{2}{n}$  هما جذرا المعادلة  $s^2 - 6s + 4 = 0$  فأوجد المعادلة التي جذراها ل، م.

ب ابحث إشارة الدالة د، حيث  $D(s) = 8 - 2s - s^2$

٧) أ أثبت أن جذري المعادلة  $s^2 + 3 = 5s$  حقيقتان مختلفتان، ثم أوجد مجموعة حل المعادلة في ح

مقرباً الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية.

ب أوجد حل المتباينة:  $s^2 - 5s - 14 \geq 0$

٨) تطبيقات فيزيائية: أطلق صاروخ رأسياً إلى أعلى بسرعة ٩٨ متر/ثانية، إذا كانت العلاقة بين المسافة

المقطوعة ف بالتر والزم ن بالثانية تعطى بالعلاقة:  $f = 98n - 4,9n^2$  فأوجد:

أ المسافة التي يقطعها الصاروخ في ثانيتين.

ب الزمن الذي يستغرقه الصاروخ حتى يقطع مسافة ٤٧٠,٤ مترًا. بما تفسر وجود إجابتين؟



## اختبار تراكمي

١ أوجد قيمة ك التي تجعل للمعادلة  $س^3 + ٤س + ك = ٠$  جذرين :

أ حقيقيين متساويين .....

ب حقيقيين مختلفين .....

ج مركبين .....

٢ أوجد قيمة ك التي تجعل:

أ أحد جذري المعادلة  $س^2 - كس + ك + ٢ = ٠$  ضعف الجذر الآخر. ....

ب أحد جذري المعادلة  $س^2 - كس + ٨ = ٠$  يزيد عن الجذر الآخر بمقدار ٢. ....

ج أحد جذري المعادلة  $س^2 - كس + ٣ = ٠$  يزيد عن المعكوس الضربي للجذر الآخر بمقدار ١. ....

٣ إذا كان ل، م جذري المعادلة  $س^2 - ٣س + ٢ = ٠$  فأوجد معادلة الدرجة الثانية التي جذراها:

أ  $س^2 - ٣س + ١ = ٠$  ب  $س^2 - ١س + ١ = ٠$  ج  $س^2 - ١س + ١ = ٠$  د  $س^2 - ١س + ١ = ٠$

٤ إذا كان  $\frac{1}{م}, \frac{1}{ل}$  هما جذرا المعادلة  $س^6 - ٥س + ١ = ٠$  فكون المعادلة التربيعية التي جذراها ل، م.

٥ ارسم منحنى الدالة د، حيث د(س) =  $س^2 - ٤$  في الفترة  $[-٣, ٣]$  ومن الرسم عين إشارة د في هذه الفترة.

٦ ارسم منحنى الدالة د، حيث د(س) =  $٦ - ٥س - ٤س^2$  في الفترة  $[-٣, ٢]$  ومن الرسم عين إشارة د في هذه الفترة.

٧ أوجد مجموعة الحل للمتباينات التربيعية الآتية:

أ  $س^2 + ٤س + ٤ > ٠$  ب  $س^2 - ٦س < ٠$  ج  $(س - ٢)^2 \leq ٩$

د  $٣ - ٢س \leq ٢$  هـ  $س^2 \geq ١٠ - ٢٥$  و  $٢س^2 - ٧س \geq ١٥$

٨ أعمال تجارية: إذا كان عدد الوحدات المنتجة والمباعة من سلعة معينة في الأسبوع هي س مليون وحدة

وكان سعر بيع الوحدة هو ع حيث  $ع = ٢ - س$ ، إذا كانت التكاليف الكلية اللازمة لإنتاج س مليون وحدة

في الأسبوع تعطى بالعلاقة  $ت = (٣, ٥ + ٠, ٥س)$  مليون وحدة فأوجد:

أ دالة الإيراد الكلي (ى) .....

ب دالة الربح (ر) .....

ج أوجد س عند مستوى ربح ٢,٠ مليون جنيه. ....

٩ إذا كانت  $١ = ٣٧ + ت$  ،  $ب = -١ - ت$ ،  $ج = -٢ - ٣٧ + ت$  فأثبت أن:  $ج - ب = (١ - ب) ت$

الإبداع

في الرياضيات

ثانياً:

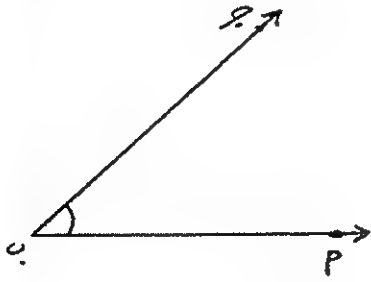
حساب المثلثات

# الوحدة الثانية

- (١) الزاوية الموجهة
- (٢) القياس الستيني والقياس الدائري للزاوية
- (٣) الدوال المثلثية
- (٤) الزوايا المنتسبة
- (٥) التمثيل البياني للدوال المثلثية
- (٦) إيجاد قياس زاوية بمعلومية احدي نسبها المثلثية

## تمارين عامة علي الوحدة اختبار الوحدة

### ١١، "الزاوية الموجهة"



نعلم أنه :- الزاوية هي اتحاد شعاعين لهما نفس نقطة البداية .

\* من الشغل المقابل :- تسمى النقطة ب رأس الزاوية

والشعاعين بـ  $\vec{P}$  ، بـ  $\vec{Q}$  ضلعوا الزاوية

أي أنه  $\vec{P} \neq \vec{Q}$  ،  $P \neq Q$  . وعليه قراءته  $P \neq Q$

← القياس السمين للزاوية :-

وأساسة تقسيم الدائرة إلى ٣٦٠ قوسًا متساوية من الطول وعليه يكونه أي زاوية

مركزيّة يمر ضلعها بنوايتين هذا القوس يكون قياسه درجة واحدة (١°)

← اجزاء الدرجة هي :- الدقيقة (١') ، الثانية (١'')

حيث  $1' = 60''$  ،  $1'' = 60'''$

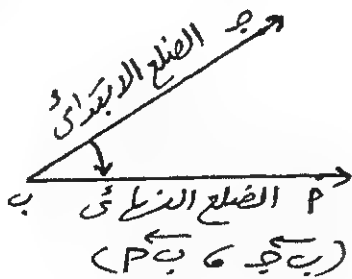
\* الزاوية الموجهة :-

إذا اخذنا من الاعتبار ترتيب ضلع الزاوية بحيث يكون اتجاهها هو الضلع الابتدائي

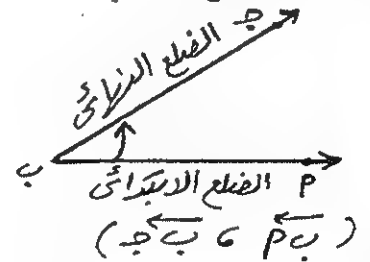
والآخر هو الضلع النهائي في هذه الحالة تكتب الزاوية على هيئة زوج مرتب

مستقيمة الأول هو الضلع الابتدائي ومستقيمة الثاني هو الضلع النهائي .

\* من الشغل المقابل :-



وتقرأ  $P \neq Q$  الموجهة



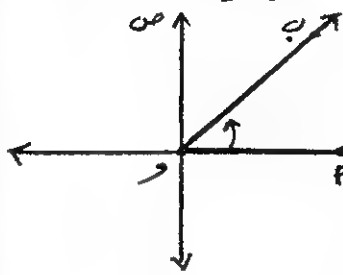
وتقرأ  $P \neq Q$  الموجهة

ملاحظة :-  $(\vec{P}, \vec{Q}) \neq (\vec{Q}, \vec{P})$  وبالتالي  $P \neq Q \neq Q \neq P$  الموجهة

\* تعريف:- الزاوية الموجبة :- هو زوج مرتب من اتحاد شعاعين لهما نفس نقطة البداية حيث يسى الشعاعين هما الزاوية ، نقطة البداية هي رأس الزاوية .

\* الوضع القياس للزاوية الموجبة :- تكون الزاوية الموجبة في وضع القياس إذا كان :-

(١) رأسها نقطة الأصل لنظام إحداثي متعامد  
(٢) ضلعها الابتدائي ينطبق على الاتجاه الموجب لمحور السينات  
في الشكل المقابل :-  $P > 0$  و زاوية موجبة في الوضع القياس .

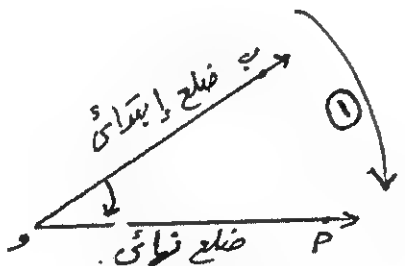


\* القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجبة :-

(I) يكون قياس الزاوية الموجبة موجباً إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي إلى الضلع النهائي في عكس اتجاه دوران عقارب الساعة .

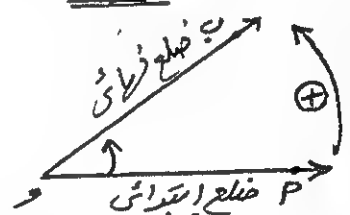
(II) يكون قياس الزاوية الموجبة سالباً إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي إلى الضلع النهائي في اتجاه دوران عقارب الساعة .

\* في الشكل المقابل :-



$$Q < P \text{ (أو } Q < P \text{)}$$

قياسها سالب لأنه الدوران من الضلع الابتدائي إلى النهائي مع اتجاه حركة عقارب الساعة



$$Q > P \text{ (أو } Q > P \text{)}$$

قياسها موجب لأنه الدوران من الضلع الابتدائي إلى النهائي عكس اتجاه حركة عقارب الساعة

ملاحظة خاصة

(١) كل زاوية موجهة في الوضع القياس قياسها إما حادها موجب والآخر سالب بحيث يكون مجموع القيمة المطلقة لكل منهما  $= 360^\circ$ .

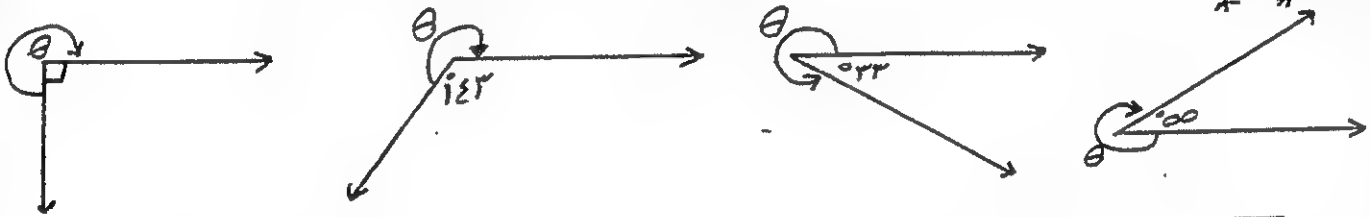
(٢) إذا كان  $\theta$  هو القياس الموجب لزاوية موجهة فإما القياس السالب لها هو  $(360 - \theta)$

وإذا كان  $\theta$  هو القياس السالب لزاوية موجهة فإما القياس الموجب لها هو  $(360 + \theta)$

مثلاً :- إذا كان قياس الزاوية  $= 120^\circ$  فإما القياس السالب لها  $= 360 - 120 = 240^\circ$

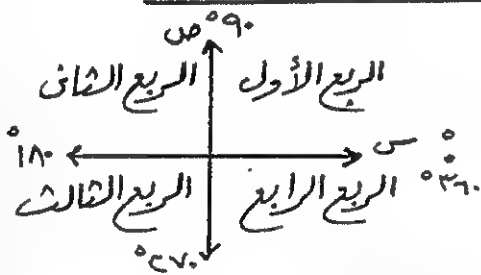
وإذا كان قياس الزاوية  $= -30^\circ$  فإما القياس الموجب لها  $= 360 + (-30) = 330^\circ$

\* تدوين \* أوجد قياس الزاوية  $\theta$  الموجهة في كل من الأشكال الآتية :-

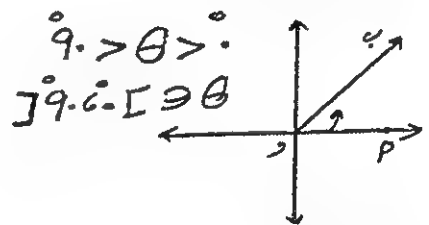


\* موقع الزاوية في المستوى الإحداثي المتعامد :-

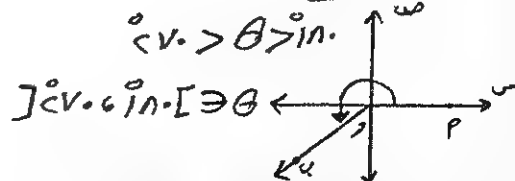
في الشكل المقابل :- يُقسَّم المستوى إلى أربعة أرباع .



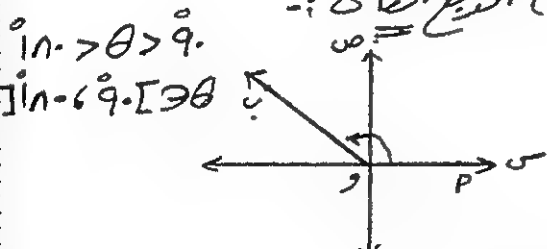
(١) الربع الأول :-



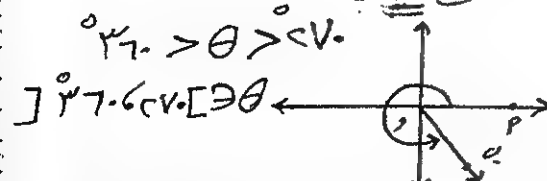
(٢) الربع الثالث :-



(٣) الربع الثاني :-



(٤) الربع الرابع :-



## الصف الأول الثانوي

الحالة بالزاوية الربعية وهذه الزوايا هي:  $90^\circ$  و  $180^\circ$  و  $270^\circ$

$$^{\circ}CV. \quad \circlearrowleft \quad ^{\circ}C90 \quad \circlearrowleft \quad ^{\circ}130 \quad \circlearrowleft \quad ^{\circ}CIV \quad \circlearrowleft \quad \Sigma n$$

\* ٢٩٠ < ٢٩٠ > ٢٩٠ > ٢٦٠

\* \* \* \* \* عَيْسَى الْمَرْبَعِ الَّذِي تَقَعُ فِيهِ كُلُّ مِنَ الزَّوَايَا الْأَتِيَةِ : .

$^{\circ}19. \quad ^{\circ}20. \quad ^{\circ}21. \quad ^{\circ}22. \quad ^{\circ}23.$

مجمع أوطسج ٣٦٠ عهد الزاوية أومضاخات ٣٦٠.

وأيضا تكافؤ زاوية قياسها  $\angle C = 26^\circ + 10^\circ = 36^\circ$  وهكذا ...

\* \* \* ترتيب \* أوجد قياس زاويتيهما أحدهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب  
\* \* \* تكافؤ كل من الزوايا الآتية (مستقلة معطى من الضلع النشط) .

جـ ٤ ١٥٠ - ٦ ١٥٠ - ٦ ٤٠ - ٦ ١٨٠ - ٦

مثال ٥ :- عيبر أصفه بقياس موجب كل من الزوايا الآتية :-

(١) ٦٢ - ٦ ٤٠ - ٦ ٢٥٠ - ٦ ٢٠ - ٦ ٧٩ - ٦

الحل :- (١) أصفه بقياس موجب = ٦٢ - ٦ ٢٠ - ٦ ٩٨ = ٦٩٨

(٢) أصفه بقياس موجب = ٢٠ - ٦ ٢٥٠ - ٦ ١٣٥ = ١٣٥

(٣) أصفه بقياس موجب = ٢٠ - ٦ ١٧٠ = ١٧٠

(٤) أصفه بقياس موجب = ٢٠ - ٦ ٧٩ - ٦ ٩٠ = ٩٠

مكتبة وسام  
شؤون شارع حسي مبارك - خلف الثانوية بسات  
01004423597, 3943035

مثال ٦ :- عيبر الربع الذي تقع فيه كل زاوية مما يأتي

(١) ٨٧٥ - ١٠٩ - ١٠٩ - ١٠٩

الحل :- (١) ٨٧٥ - ١٠٩ - ١٠٩ - ١٠٩ = ٨٧٥ - ٣٢٠ = ٥٥٥  
٨٧٥ - ٣٢٠ = ٥٥٥ تكافؤ ١٥٥

:- الزاوية ١٥٥ تقع في الربع الثاني :- الزاوية ٨٧٥ تقع أيضًا في الربع الثاني

(٢) ١٠٩ - ١٠٩ - ١٠٩ - ١٠٩ = ١٠٩ - ٣٢٠ = -٢١١

:- الزاوية ١٠٩ - ١٠٩ - ١٠٩ - ١٠٩ = ١٠٩ - ٣٢٠ = -٢١١

:- الزاوية ١٠٩ تقع في الربع الرابع :- الزاوية ١٠٩ تقع أيضًا في الربع الرابع

\* \* \* ترتيب \* عيبر الربع الذي تقع فيه كل زاوية مما يأتي

(١) ٥٥٥ - ١٢٢ - ١٢٢ - ١٢٢



## تمارين على الزاوية الموجهة

١. أكمل ما يأتي :-

- (١) تكون الزاوية الموجهة من الموضع القياس إذا كانت .....
- (٢) يقال للزاوية الموجهة من الموضع القياس أنظر متكافئة إذا كانت .....
- (٣) إذا وقع الضلع النقطي لزاوية موجهة على أحد محوري الإحداثيات تسمى الزاوية .....
- (٤) إذا كانت قياس زاوية موجهة  $90^\circ$  من قياس الزاوية  $(\theta \pm 360^\circ)$  تسمى .....
- (٥) الزاوية التي قياسها  $90^\circ$  تقع من الربع - ....
- (٦) الزاوية التي قياسها  $270^\circ$  تقع من الربع - ....
- (٧) أصغر قياس موجب للزاوية التي قياسها  $300^\circ$  يساوي .....
- (٨) أكبر قياس سالب للزاوية التي قياسها  $170^\circ$  يساوي .....

٢. غير أصغر قياس موجب لكل من الزوايا الآتية ثم غير الربع الذي تقع فيه كل زاوية :-

- |                |                 |                |                 |
|----------------|-----------------|----------------|-----------------|
| (١) $6^\circ$  | (٢) $150^\circ$ | (٣) $5^\circ$  | (٤) $110^\circ$ |
| (٥) $15^\circ$ | (٦) $780^\circ$ | (٧) $90^\circ$ | (٨) $170^\circ$ |

٣. أوجد قياس زاوية غيرهما موجب والآخر سالب مشترك لغير من الضلع النقطي لكل من :-

- |               |                 |                |
|---------------|-----------------|----------------|
| (١) $1^\circ$ | (٢) $250^\circ$ | (٣) $20^\circ$ |
|---------------|-----------------|----------------|

٤. جميع الزوايا الآتية تكافئ الزاوية  $75^\circ$  من الموضع القياس عاذا الإجابة .....

- |                 |                |                 |                 |
|-----------------|----------------|-----------------|-----------------|
| (١) $285^\circ$ | (٢) $75^\circ$ | (٣) $285^\circ$ | (٤) $285^\circ$ |
|-----------------|----------------|-----------------|-----------------|

٥. يدور أحد لاعبي الجولف على حبل في الألعاب بزاوية قياسها  $20^\circ$

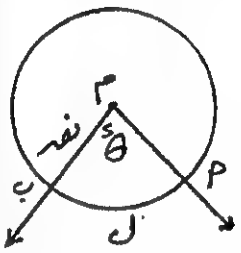
ارسم هذه الزاوية من الموضع القياس .

(د) القياس السيني والقياس الدائري للزاوية

\* القياس الدائري للزاوية :-

واساسه تقسيم الدائرة الى (360) قوسًا متساوية من الطول وتسمى وحدة القياس (الزاوية النصف قطرية) ويرمز له بالرمز (ا)، ويُقرأ واحد دائري " راديان " تعريف :-

القياس الدائري لزاوية مركزية من دائرة (ا) تحصر قوسًا طوله (ل) من دائرة طول نصف قطرها (نصف) يكون على الصورة :-



$$\begin{aligned} \theta &= \frac{l}{\text{نصف}} \\ \theta \times \text{نصف} &= l \end{aligned}$$

$$\theta = \frac{l}{\text{نصف}}$$

الزاوية النصف قطرية :- هي الزاوية المركزية من دائرة والتي تحصر قوسًا طوله يساوي طول نصف قطر الدائرة أي  $[l = \text{نصف}]$  وبالتالي يكون  $\theta = 1$  مثال :- الزاوية المركزية التي تحصر قوسًا طوله يساوي نصف طول نصف قطر هذه الدائرة يكون قياسها = ..... ؟

الحل :-  $\theta = \frac{l}{\text{نصف}} \therefore \theta = \frac{l}{\text{نصف}} = \frac{1}{\text{نصف}} = \frac{1}{\text{نصف}} \times \text{نصف} = 1$  مثال :- إذا كان القياس الدائري لزاوية مركزية = 5 وقياس هذه الزاوية تحصر قوسًا من دائرة = ..... طول نصف قطر هذه الدائرة .

الحل :-  $\theta = \frac{l}{\text{نصف}} \therefore l = \theta \times \text{نصف} = 5 \times \text{نصف} = 5 \times \text{نصف}$

مثال ① :- زاوية مركزية من دائرة طول نصف قطرها 5 سم تحصر قوس طوله 5 سم أو هو قياسها بالتقدير الدائري

الحل :-  $\theta = \frac{l}{\text{نصف}} = \frac{5}{5} = 1$

مثال ⑤ :- زاوية مركزية قياسها  $1,3^\circ$  تحصر قوسًا طوله  $3\text{ كم}$  . أوجد طول قطر الدائرة ومساحة الدائرة ومحيطها لأقرب رقم عشري.

الحل :-  $\theta = 1,3^\circ$   $c = 3\text{ كم}$

$$\therefore \text{نفر} = \frac{c}{\theta} = \frac{3}{1,3} = \text{نفر} = 2,30769 \approx 2,31 \text{ نفر} \therefore \text{طول القطر} = 10 \times 2,31 = 23,1 \text{ كم}$$

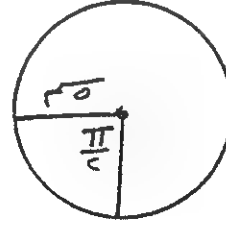
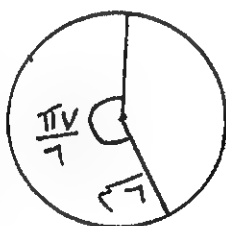
$$\therefore \text{مساحة الدائرة} = \text{طنفة} = 10 \times \frac{2,31}{2} = 11,55 \text{ كم}^2$$

$$\therefore \text{محيط الدائرة} = 2 \times \text{طنفة} = 10 \times 2,31 = 23,1 \text{ كم}$$

\* \* \* تدريب \* (1) زاوية مركزية تحصر قوسًا طوله  $8\text{ كم}$  في دائرة طول قطرها  $10\text{ كم}$  . أوجد قياسها بالتقدير الدائري . \* \*

(2) زاوية مركزية قياسها  $c^\circ$  تحصر قوسًا طوله  $11\text{ كم}$  . أوجد طول نصف قطر هذه الدائرة ومساحتها .

مثال ⑥ :- أوجد طول القوس الذي يحصر الزاوية المظلومة في كل من الدوائر الآتية مقربًا الخارج لأقرب جزء من عشرة .



$$\text{الحل :- (1) طول القوس} = \theta \times \text{نفر} = 5 \times \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \approx 5,236 \text{ كم}$$

$$(2) \text{ طول القوس} = \theta \times \text{نفر} = 8 \times \frac{\pi}{3} = \frac{8\pi}{3} \approx 8,377 \text{ كم}$$

$$(3) \text{ طول القوس} = \theta \times \text{نفر} = 6 \times \frac{\pi}{2} = 3\pi \approx 9,424 \text{ كم}$$

\* العلاقة بين إقياس السنين وإقياس الدائري :-

إذا كان إقياس زاوية بالتقدير الدائري =  $\theta^\circ$  ، إقياسها بالتقدير السنين =  $s^\circ$

فإنه  $\frac{s}{\theta} = \frac{\pi}{180}$  ومنه :-  $\theta = \frac{1}{\pi} \times s$   $s = \frac{180}{\pi} \times \theta$  حيث  $\frac{s}{\theta} = \frac{\pi}{180}$

ملاحظة

(1)  $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$   $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$   $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$   $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$   $\frac{3\pi}{4} = 135^\circ$   $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$

(2) إذا كان طول نصف قطر الدائرة يساوي الواحد فإن الدائرة تسمى "دائرة الوحدة" ويكون  $\theta = 1$

مثال (4) :- أوجد بالزاوية إقياس الدائري لأقرب ربع عشر من الزوايا التي إقياسها كالتالي :- (1)  $1.0^\circ$  (2)  $1.5^\circ$  (3)  $1.7^\circ$

الحل :-

(1)  $\theta = \frac{1}{\pi} \times s \Rightarrow \theta = \frac{1}{\pi} \times 1.0 = 0.318^\circ$

(2)  $\theta = \frac{1}{\pi} \times s \Rightarrow \theta = \frac{1}{\pi} \times 1.5 = 0.477^\circ$

مثال (5) :- أوجد إقياس السنين لكل من الزوايا الآتية

(1)  $30^\circ$  (2)  $45^\circ$  (3)  $60^\circ$

الحل :-

(1)  $s = \frac{180}{\pi} \times \theta = \frac{180}{\pi} \times 30 = 540^\circ$

(2)  $s = \frac{180}{\pi} \times \theta = \frac{180}{\pi} \times 45 = 810^\circ$

- \* \* \* (١) أوجد القياس الدائري للزاوية:  $٨٣^\circ$  ،  $١٤^\circ$  ،  $١٠^\circ$   
 \* \* \* (٢) أوجد القياس السيني للزاوية:  $٥٧^\circ$  ،  $١٠٢^\circ$

هـ ملحوظة :-

(١)  $\pi$  بالتقدير الدائري تكافئ  $١٨٠$  بالتقدير السيني

$$\text{مثلاً: } \pi \text{ تكافئ } ١٨٠ \times \frac{\pi}{180} = ١.٥7$$

$$\pi ١٠٢ \text{ تكافئ } ١٨٠ \times ١٠٢ = ١٦٦$$

(٢) إذا علم القياس السيني لزاوية وطلب تحويله إلى القياس الدائري بـ  $\pi$

$$\text{نستخدم القانون: } \theta = \frac{\pi}{180} \times \text{القياس السيني} \text{ ولا نعوضه عنه } \pi$$

$$\text{مثلاً: } ٣٦ \text{ تكافئ } \frac{\pi}{180} \times ٣٦ = \frac{\pi}{5}$$

$$١٣٥ \text{ تكافئ } \frac{\pi}{180} \times ١٣٥ = \frac{٣\pi}{4}$$

مثال ٦ :- زاوية مركزية قياسها  $٨٠^\circ$  من دائرة طول نصف قطرها  $٥$  سم. أوجد

طول القوس الذي تحصره لأقرب سم

$$\text{الحل: } \therefore \theta = ٨٠^\circ \text{ ، نصفه } = ٥ \text{ سم}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{180} \times ٨٠ = \frac{4\pi}{9} \text{ ، } \theta = \frac{\pi}{180} \times ٨٠ = \frac{4\pi}{9}$$

$$\therefore L = \theta \times \text{نصفه} = \frac{4\pi}{9} \times ٥ = ٥.٧ \text{ سم}$$

مثال ٧ :- أوجد محيط الدائرة التي بـ زاوية محيطية قياسها  $٣٠^\circ$  وتجاهاها

قوس طولة  $٥$  سم

$$\text{الحل: } \therefore \text{قياس الزاوية المحيطية} = ٣٠^\circ \therefore \text{قياس الزاوية المركزية} = ٦٠^\circ$$

$$\theta = \frac{\pi}{180} \times ٦٠ = \frac{\pi}{3}$$

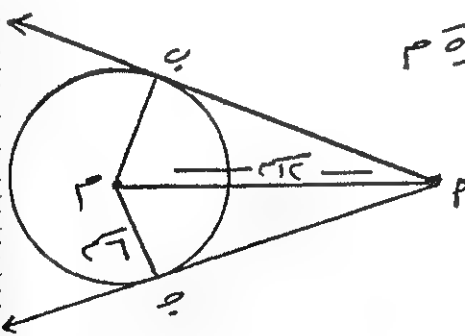
$$\therefore \text{محيط الدائرة} = c \text{ طرفة} = \frac{10}{\pi} \times \pi \times c = 10 \text{ سم}$$

— :: علی

بفرصه أنه الزاوية لها ٦٠ ص ٦٠ ص

بالتقريب من المعادلة الأولى  $\hookrightarrow 1.0 = v + v_0 \hookrightarrow v_0 = v$

∴  $\cos(\hat{A}) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{10^2 + 10^2 - 31^2}{2 \times 10 \times 10} = \frac{200 - 961}{200} = \frac{-761}{200}$



٢٢ = اسم فاعل طول القوس بـ جـ الاكبر

إذا علم أنه طول نصف قطر الدائرة  $m = 6$  م

الحكم :-

$\therefore \vec{P} \perp \vec{P}$ ,  $\vec{P} \perp \vec{Q}$  :  $\therefore \vec{P} \perp \vec{Q}$

$$(p \supset q) \vee (p \supset r) = (p \supset (q \vee r))$$

∴  $\rho = \frac{1}{2}$       ∴  $\rho = (P \hat{P}) = \frac{1}{2}$       "علاقة الاثنين سجين"

$$\therefore \text{ن} (ب\hat{P}ج) = ٢٠ \times ٣ = ٦٠^\circ$$

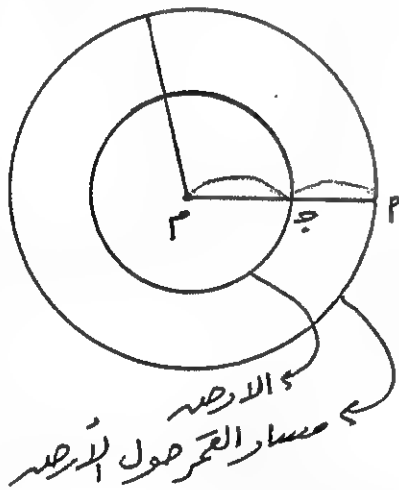
$$\therefore \text{ن} (ب\hat{M}ج) = ٣٦^\circ - (٦٠^\circ + ٩٠^\circ + ٩٠^\circ) = ١٢٠^\circ$$

$$\therefore \text{ن} (د ب م ج) \text{ المنقلة} = ٣٦^\circ - ١٢٠^\circ = ٢٤٠^\circ$$

$$\therefore \theta = \frac{1}{180} \times ٢٤٠ = \frac{4}{3} \pi \approx ٤.١٩ \text{ راديان}$$

$$\therefore \text{ل} = \theta \times \text{ن} = ٤.١٩ \times ٦ \approx ٢٥.١ \text{ سم} \leftarrow \text{طول جيب الاكبر} \approx ٢٥.١ \text{ سم}$$

مثال ١٠ :- قمر صناعي يدور حول الأرض في مسار دائري دورة كاملة كل ٣ ساعات وإذا كان طول نصف قطر الأرض يبلغ تقريباً ٦٤٠٠ كم وبعد القمر عن سطح الأرض ٣٦٠٠ كم أوجد المسافة التي يقطعها القمر خلال ساعة واحدة تقريباً الناتج لأقرب كم.



$$\therefore \text{طول نصف قطر دائرة مسار القمر} = P+ج$$

$$\therefore P+ج = ٦٤٠٠ + ٣٦٠٠ = ١٠٠٠٠ \text{ كم}$$

القمر يقطع لمسار الدائري "دورة كاملة" في ٣ ساعات وهذا يقابل زاوية مركزية  $٣٦٠^\circ$  ( $2\pi$ )

القمر يقطع حوساً طوله  $\frac{1}{3}$  محيط الدائرة في الساعة الواحدة

وهذا يقابل زاوية مركزية  $١٢٠^\circ$  ( $\frac{2\pi}{3}$ )

$$\therefore \text{ل} = \theta \times \text{ن} = \frac{2\pi}{3} \times ١٠٠٠٠ \approx ٢٠٩٤٤ \text{ كم}$$

\* تدرب \* يدور لاعبي الجباز على جهاز الألعاب بزوايا قياس ٩٠°  
\* \* ارفع هذه الزاوية في الوضع القياس وأوجد قياسها بالنقد  
الدائري

تمارين على "مروية قياس الزاوية"

أولاً: اختيار من متعدد:

- ١) الزاوية التي قياسها  $60^\circ$  في الوضع القياسي تكافئ الزاوية التي قياسها:
 

أ  $120^\circ$       ب  $240^\circ$       ج  $300^\circ$       د  $420^\circ$
- ٢) الزاوية التي قياسها  $\frac{2\pi}{3}$  تقع في الربع:
 

أ الأول      ب الثاني      ج الثالث      د الرابع
- ٣) الزاوية التي قياسها  $\frac{\pi}{4}$  تقع في الربع:
 

أ الأول      ب الثاني      ج الثالث      د الرابع
- ٤) إذا كان مجموع قياسات زوايا أى مضلع منتظم تساوى  $180^\circ (n-2)$  حيث  $n$  عدد الأضلاع، فإن قياس زاوية الخمس المنتظم بالقياس الدائري تساوى:
 

أ  $\frac{\pi}{3}$       ب  $\frac{2\pi}{3}$       ج  $\frac{\pi}{2}$       د  $\frac{2\pi}{3}$
- ٥) الزاوية التي قياسها  $\frac{2\pi}{3}$  قياسها الستيني يساوى:
 

أ  $100^\circ$       ب  $210^\circ$       ج  $420^\circ$       د  $840^\circ$
- ٦) إذا كان القياس الستيني لزاوية هو  $64^\circ$  فإن قياسها الدائري يساوى:
 

أ  $0,18$       ب  $0,36$       ج  $0,18\pi$       د  $0,36\pi$
- ٧) طول القوس في دائرة طول قطرها ٢٤ سم ويقابل زاوية مركزية قياسها  $30^\circ$  يساوى:
 

أ  $2\pi$  سم      ب  $3\pi$  سم      ج  $4\pi$  سم      د  $5\pi$  سم
- ٨) القوس الذى طوله  $2\pi$  سم في دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم يقابل زاوية مركزية قياسها يساوى:
 

أ  $30^\circ$       ب  $60^\circ$       ج  $90^\circ$       د  $180^\circ$
- ٩) إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث  $70^\circ$  وقياس زاوية أخرى فيه  $\frac{\pi}{4}$  فإن القياس الدائري للزاوية الثالثة يساوى:
 

أ  $\frac{\pi}{4}$       ب  $\frac{\pi}{2}$       ج  $\frac{\pi}{3}$       د  $\frac{5\pi}{12}$



ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

١٠. أوجد بدلالة  $\pi$  القياس الدائري للزوايا التي قياساتها كالاتي:

أ ٢٢٥°	ب ٢٤٠°
ج ١٣٥°	د ٣٠٠°
هـ ٣٩٠°	و ٧٨٠°

١١. أوجد بالراديان القياس الدائري للزوايا التي قياساتها كالاتي، مقرباً الناتج لثلاثة أرقام عشرية:

أ ٥٦,٦°	ب ٢٥١,٨°	ج ٤٨° ٥٠' ١٦٠"
---------	----------	----------------

١٢. أوجد القياس الستيني للزوايا التي قياساتها كالاتي، مقرباً الناتج لأقرب ثانية:

أ ٥٠,٤٩°	ب ٢٣,٢٧°	ج ٣١,١°
----------	----------	---------

١٣. إذا كانت  $\theta$  زاوية مركزية في دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم وتحصر قوساً طوله ل:

أ. إذا كان  $س = ٢٠$  سم،  $\theta = ١٥٠^\circ$  أوجد ل. (لأقرب جزء من عشرة)

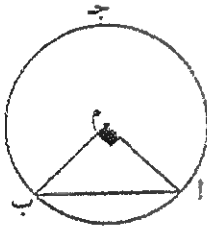
ب. إذا كان  $ل = ٢٧,٣$  سم،  $\theta = ٢٤^\circ$  أوجد س. (لأقرب جزء من عشرة)

١٤. زاوية مركزية قياسها  $١٥٠^\circ$  وتحصر قوساً طوله ١١ سم، احسب طول نصف قطر دائرتها (لأقرب جزء من عشرة)

١٥. أوجد القياس الدائري والقياس الستيني للزاوية المركزية التي تقابل قوساً طوله ٨,٧ سم في دائرة طول نصف قطرها ٤ سم.

١٦. الربط بالهندسة: مثلث قياس إحدى زواياه  $٦٠^\circ$  وقياس زاوية أخرى منه يساوي  $\frac{\pi}{٤}$  أوجد القياس الدائري والقياس الستيني لزاويته الثالثة.

١٧. الربط بالهندسة: دائرة طول نصف قطرها ٤ سم، رسمت  $\triangle$  أ ب ج المحيطة التي قياسها  $٣٠^\circ$  أوجد طول القوس الأصغر أ ج.



١٨. الربط بالهندسة: في الشكل المقابل إذا كان مساحة المثلث م أ ب

القائم الزاوية في م = ٣٢ سم<sup>٢</sup> فأوجد محيط الشكل مقرباً الناتج لأقرب

رقمين عشرين

مكتبة وسام

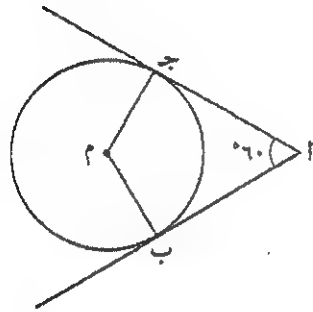
شوين - شارع حسي مبارك - خلف الثانوية بنات

01004423597\_3943035

١٩) الربط بالهندسة:  $\overline{AB}$  قطر في دائرة طوله ٢٤ سم، رسم الوتر  $\overline{AC}$  بحيث كان  $\angle C = 50^\circ$ . أوجد طول القوس الأصغر  $\widehat{AC}$  مقرباً الناتج لأقرب رقمين عشريين.

٢٠) مسافات: كم المسافة التي تقطعها نقطة على طرف عقرب الدقائق خلال ١٠ دقائق إذا كان طول هذا العقرب ٦ سم؟

٢١) فلك: قمر صناعي يدور حول الأرض في مسار دائري دورة كاملة كل ٦ ساعات، فإذا كان طول نصف قطر مساره عن مركز الأرض ٩٠٠٠ كم، فأوجد سرعته بالكيلومتر في الساعة.



٢٢) الربط بالهندسة: في الشكل المقابل:

$\overline{AB}$ ،  $\overline{AC}$  مماسان للدائرة م، و  $\angle A = 60^\circ$ ،  $AB = 12$  سم. أوجد لأقرب عدد صحيح طول القوس الأكبر  $\widehat{BC}$ .



٢٣) الربط بالزمن: تستخدم المزولة الشمسية لتحديد الوقت أثناء النهار من خلال طول الظل الذي يسقط على سطح مدرج لإظهار الساعة وأجزائها، فإذا كان الظل يدور على القرص بمعدل  $15^\circ$  لكل ساعة.

أ أوجد قياس الزاوية بالراديان التي يدور الظل عنها بعد مرور ٤ ساعات.

ب بعد كم ساعة يدور الظل بزاوية قياسها  $\frac{2\pi}{3}$  راديان؟

ج مزولة طول نصف قطرها ٢٤ سم، أوجد بدلالة  $\pi$  طول القوس الذي يصنعه دوران الظل على حافة القرص بعد مرور ١٠ ساعات.

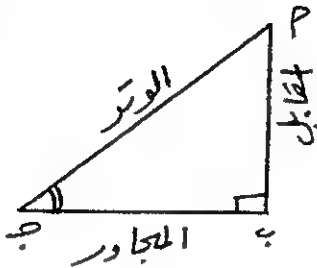
٢٤) تفكير ناقد: مستقيم يصنع زاوية قياسها  $\frac{\pi}{3}$  راديان في الوضع القياسي لدائرة الوحدة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. أوجد معادلة هذا المستقيم.

### ٣) الدوال المثلثية

تعريف :- نعلم أنه :- من أي مثلث  $APB$  قائم من  $B$  يكون :-

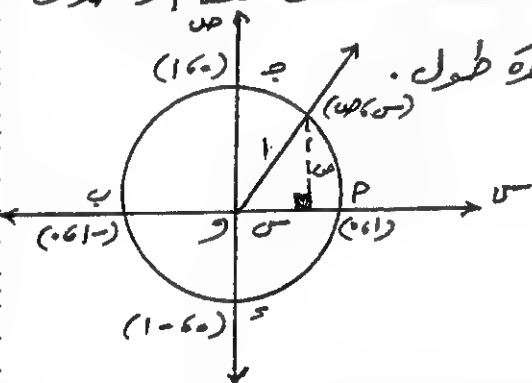
$$\text{جاء} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{AP}{BP} \quad \text{كج جتا} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{BP}{BP}$$

$$\text{ظا} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{AP}{BP}$$



أي أنه :- النسبة المثلثية للزاوية الحادة بنسبة ثابتة  
لا تتغير إلا إذا تغير قياس زاوية.

دائرة الوحدة :- دائرة الوحدة هي دائرة مركزها نقطة الأصل لنظام إحداثي



متعامد وطول نصف قطرها يساوي وحدة طول.

• دائرة الوحدة تقطع محاور السينات في النقطتين

$P(0,1)$  و  $Q(1,0)$  وتقطع محاور الصادات

في النقطتين  $J(0,-1)$  و  $K(-1,0)$

⊗ إذا كانت  $(س, ص)$  هما إحداثيات أي نقطة على دائرة الوحدة فإنه

$ص \in [-1, 1]$  حيث  $س \in [-1, 1]$

$ص \in [-1, 1]$

"محدد فيثاغورث"

(هوية)

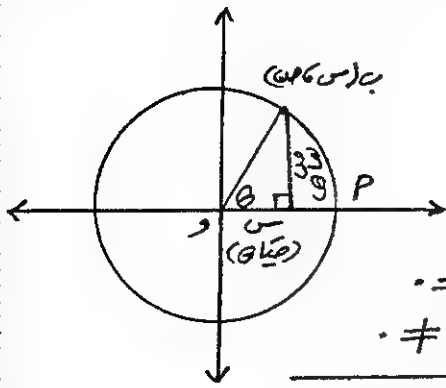
$$\boxed{س^2 + ص^2 = 1}$$

### الدوال المثلثية الأساسية للزاوية :-

لأي زاوية موجهة من الوضع القياسي وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في

النقطة  $B(س, ص)$  وقياسها  $\theta$  يملك تعريف الدوال الآتية :-

(١) جيب الزاوية  $\theta =$  الإحداثي الصادي للنقطة  $B \Leftarrow \boxed{ص = \sin \theta}$



(١) جيب تمام الزاوية  $\theta$  = الإحداثي السيني للنقطة ب

$$\boxed{\cos \theta = x}$$

(٢) ظل الزاوية  $\theta$  =  $\frac{\text{الإحداثي الصادي}}{\text{الإحداثي السيني}}$

$$\boxed{\tan \theta = \frac{y}{x}} \quad \text{،} \quad \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta \quad \text{،} \quad \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

من "ملحوظة" (١) يتبع (س، ص) لأي نقطة على دائرة الوحدة على الصيغة (جبا، صبا)

مثال: إذا كانت النقطة  $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$  هي نقطة تقاطع الضلع النشط للزاوية موجهة قياسها  $\theta$  مع دائرة الوحدة فإنه:-

$$\cos \theta = \frac{12}{13} \quad \text{،} \quad \sin \theta = \frac{5}{13} \quad \text{،} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{5}{12}$$

(٢) الزوايا المتكافئة لظنفس الدوال المثلثية.

مثال: جتا  $30^\circ$  = جبا  $(-60^\circ - 360^\circ)$  = جبا  $30^\circ$  "حيث  $30^\circ$  تكافئ  $30^\circ$ "

### مقلوبات الدوال المثلثية:-

لأي زاوية موجهة من الوضع القياس وضلعوط النشط تقطع دائرة الوحدة من النقطة ب (س، ص) إذا كان قياس الزاوية  $\theta$  فإنه:-

(١) قاطع الزاوية  $\theta$  :  $\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sec \theta}$  ، حيث  $\sec \theta \neq 0$

(٢) قاطع تمام الزاوية  $\theta$  :  $\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{1}{\cos \theta}$  ، حيث  $\cos \theta \neq 0$

(٣) ظل تمام الزاوية  $\theta$  :  $\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{1}{\sin \theta}$  ، حيث  $\sin \theta \neq 0$

مثال ⑤ :- أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية قياسها  $\theta$  المرسومة في الموضع إقياس وضلعها النقطي لقطع دائرة الوحدة من النقطة  $P$  في كل ما يأتي :-

(1)  $P(1, 0)$  (2)  $P(0, 1)$  (3)  $P(0, -1)$  (4)  $P(-1, 0)$

الحل :-

(1)  $P(1, 0) \Rightarrow \cos \theta = 1$   $\sin \theta = 0$

$\cos \theta = 1$   $\sin \theta = 0$

$\cos \theta = 1$   $\sin \theta = 0$  (غير معرفة)

(2)  $P(0, 1)$   $\sin \theta = 1$   $\cos \theta = 0$

$\sin \theta = 1$   $\cos \theta = 0$   $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$\sin \theta = 1$   $\cos \theta = 0$   $\Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2}$

$\sin \theta = 1$   $\cos \theta = 0$   $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$   $\theta = \frac{3\pi}{2}$

$\sin \theta = 1$   $\cos \theta = 0$   $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$   $\theta = \frac{3\pi}{2}$

$\sin \theta = 1$   $\cos \theta = 0$   $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$   $\theta = \frac{3\pi}{2}$

(3)  $P(0, -1)$   $\sin \theta = -1$   $\cos \theta = 0$

$\sin \theta = -1$   $\cos \theta = 0$   $\Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2}$   $\theta = \frac{\pi}{2}$

$\sin \theta = -1$   $\cos \theta = 0$   $\Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2}$   $\theta = \frac{\pi}{2}$

$\sin \theta = -1$   $\cos \theta = 0$   $\Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2}$   $\theta = \frac{\pi}{2}$

$\sin \theta = -1$   $\cos \theta = 0$   $\Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2}$   $\theta = \frac{\pi}{2}$

$\sin \theta = -1$   $\cos \theta = 0$   $\Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2}$   $\theta = \frac{\pi}{2}$

$\sin \theta = -1$   $\cos \theta = 0$   $\Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2}$   $\theta = \frac{\pi}{2}$

مثال ⑥ :- إذا عرفت الزاوية المرسومة في الموضع إقياس والتي قياسها  $\theta$  النقطة  $P(x, y)$  على دائرة الوحدة حيث  $x < 0$ ، أوجد جميع الدوال المثلثية  $\sin \theta$   $\cos \theta$   $\tan \theta$   $\cot \theta$   $\sec \theta$   $\csc \theta$

الحل :- :- لأي نقطة على دائرة الوحدة  $\sin^2 + \cos^2 = 1$

$$\frac{1}{\cos} = \sec \Leftrightarrow 1 = \sec 0 \Leftrightarrow 1 = \sec 17 + \sec 9 \Leftrightarrow 1 = (\sec 2) + (\sec 3) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{0} = P} \Leftrightarrow 0 < P \quad \frac{1}{0} \pm = \frac{1}{0} \pm = P \quad \therefore$$

$$(\sec 2 - \sec 3) = (\frac{1}{0} \times 2 - \frac{1}{0} \times 3) \Leftrightarrow (\sec 2 - \sec 3) \quad \therefore$$

$$\frac{2}{3} = \theta \text{ جـ}$$

$$\frac{3}{2} = \theta \text{ جـ}$$

$$\frac{2}{2} = \theta \text{ جـ}$$

$$\frac{2}{0} = \theta \text{ جـ}$$

$$\frac{3}{2} = \theta \text{ جـ}$$

$$\frac{2}{3} = \theta \text{ جـ}$$

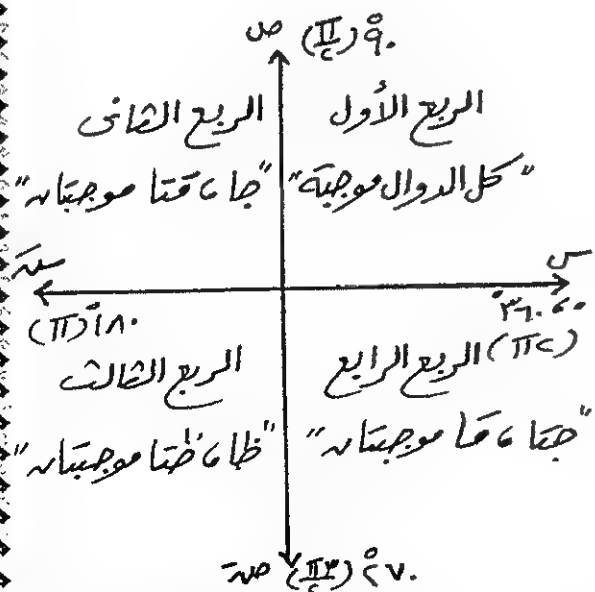
$$\# \text{ II} = \frac{2}{0} = \frac{17}{0} + \frac{9}{0} = (\frac{2}{0}) + (\frac{3}{0}) = \theta \text{ جـ} + \theta \text{ جـ} \Leftrightarrow$$

\* \* \* \* \* أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية قياسها  $\theta$  المرسومة في الوضع القياسي وضلعها النقطي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب حيث :-

(1) ب (  $\frac{1}{2}$  ,  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  ) (2) ب (  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  ,  $\frac{1}{2}$  ) (3) ب (  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  ,  $-\frac{1}{2}$  ) (4) ب (  $-\frac{1}{2}$  ,  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  )

إشارة الدوال المثلثية :-

الربع	الفترة لـ تقع فيها الزاوية	إشارة لدوال المثلثية		
		جـ مقتا	جـ مقتا	ظا مقتا
الأول	$[0, \frac{\pi}{2}]$	+	+	+
الثاني	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	-	-	+
الثالث	$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$	+	-	-
الرابع	$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$	-	+	-



مثال ٣ :- حدد إشارة الدوال الآتية :-

ح.١٠ ، ج.٤٠ ، ظ.١٠ ، ق.٣٠ ، ق.٣٠ ، ق.٣٠ ، ج.٩٠

الحل :- \* : ٦٠ تقع في الربع الأول

\* : ٤٠ تقع في الربع الثالث

\* : ١٠ تقع في الربع الثالث

\* : ٣٠ تقع في الربع الرابع

\* :  $\frac{180 \times 5}{3} = 300$  (الثاني) : ٣٠ تقع في الربع

\* : ٣٠ تكافئ ٣٠ - ٣٠ = ٠ (الرابع) : ٣٠ - ٣٠ = ٠ سالبة

\* : ٩٠ تكافئ ٩٠ - ٩٠ = ٠ (الثالث) : ٩٠ - ٩٠ = ٠ سالبة

\* : حدد إشارة الدوال الآتية :-

ح.١٠ ، ج.٩٠ ، ظ.٣٠ ، ق.٣٠ ، ق.٣٠ ، ق.٣٠

مثال ٣ :- إذا كان الضلع المنطقي لزاوية  $\theta$  من وضعت في القياس يقطع دائرة

الوحدة في النقطة ب (٦.٠ - ٨.٠) فأوجد قيمة  $\sin \theta$  و  $\cos \theta$  و  $\tan \theta$  و  $\cot \theta$  و  $\sec \theta$  و  $\csc \theta$

ثم أوجد  $\sin \theta$  ،  $\cos \theta$  ،  $\tan \theta$  ،  $\cot \theta$  ،  $\sec \theta$  ،  $\csc \theta$

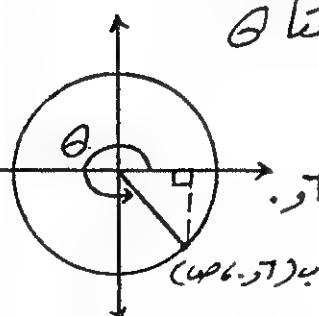
الحل :- لأي نقطة على دائرة الوحدة  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

:- (٦.٠ - ٨.٠)  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$   $\Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - 36 = -35$   $\Rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{-35}$

$\Rightarrow \sin \theta = \pm \sqrt{1 - 36} = \pm \sqrt{-35}$

:-  $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$  : ٦.٠ - ٨.٠ تقع في الربع :  $\sin \theta$  سالبة

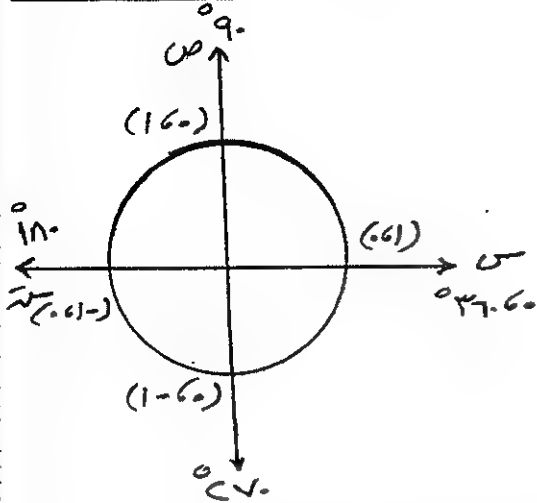
:-  $\sin \theta = -\sqrt{35}$   $\Rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{1 - 35} = \pm \sqrt{-34}$







الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة :-



مع العلم أنه  $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}}$

* 0°	←	(1, 0)	جنا	ظا
* 90°	←	(0, 1)	غير معروف	غير معروف
* 180°	←	(-1, 0)	هند	هند
* 270°	←	(0, -1)	غير معروف	غير معروف
* 30°	←	( $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , $\frac{1}{2}$ )	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
* 60°	←	( $\frac{1}{2}$ , $\frac{\sqrt{3}}{2}$ )	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
* 30°	←	( $\frac{1}{2}$ , $\frac{\sqrt{3}}{2}$ )	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

وبحسب نتائج ذلك في الجدول التالي :-

ملاحظة

يتم إيجاد

هذه الدوال

المثلثية باستخدام

الآلة الحاسبة

حيث

حنا ← sin

جنا ← cos

ظا ← tan

مثال : حنا 30°

⇒ sin(30°)

=  $\frac{1}{2}$

قياس زاوية $\theta$	إحداثيات النقطة التي يعين على ضلع دائرة الوحدة	قيم الدوال المثلثية		
		حنا $\theta$	جنا $\theta$	ظا $\theta$
0° ، 360° (0°)	(1, 0)	0	1	0
90° ( $\frac{\pi}{2}$ )	(0, 1)	1	0	غير معروف
180° ( $\pi$ )	(-1, 0)	0	-1	0
270° ( $\frac{3\pi}{2}$ )	(0, -1)	-1	0	غير معروف
30° ( $\frac{\pi}{6}$ )	( $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , $\frac{1}{2}$ )	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
60° ( $\frac{\pi}{3}$ )	( $\frac{1}{2}$ , $\frac{\sqrt{3}}{2}$ )	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
30° ( $\frac{\pi}{6}$ )	( $\frac{1}{2}$ , $\frac{\sqrt{3}}{2}$ )	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

مع العلم أنه  $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}}$  و  $\frac{1}{2} = \frac{1}{\frac{2}{1}}$

مثال ٥ :- برهن استخدام الآلة الحاسبة أو جد قيمته :-

$$(1) \quad 3. \text{ جا } 60^\circ + 9. \text{ جا } 30^\circ - 9. \text{ جا } 0^\circ = 3. \text{ جا } 60^\circ + 9. \text{ جا } 30^\circ + 0. \text{ جا } 0^\circ$$

الحل :-

$$(1) \quad 3. \text{ جا } 60^\circ + 9. \text{ جا } 30^\circ - 9. \text{ جا } 0^\circ = 3. \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 9. \left( \frac{1}{2} \right) - 9. \left( 0 \right)$$

$$\left[ \frac{3\sqrt{3}}{2} \right] = \frac{3}{2} - 1 + \frac{1}{2} =$$

$$(2) \quad 3. \text{ جا } 60^\circ + 9. \text{ جا } 30^\circ - 9. \text{ جا } 0^\circ = 3. \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 9. \left( \frac{1}{2} \right) - 9. \left( 0 \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2} - 0 = \frac{3\sqrt{3} + 9}{2}$$

مثال ٧ :- أثبت أنه :- (1)  $9. \text{ جا } 60^\circ = 3. \text{ جا } 60^\circ + 6. \text{ جا } 30^\circ$

$$(2) \quad 9. \text{ جا } 60^\circ = 3. \text{ جا } 60^\circ + 6. \text{ جا } 30^\circ$$

الحل :-

$$(1) \quad \text{الطرف الأيسر} = 9. \text{ جا } 60^\circ = 9. \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{الطرف الأيسر} = 9. \text{ جا } 60^\circ = 1 = \frac{2}{2}$$

$$(2) \quad \text{الطرف الأيسر} = 9. \text{ جا } 60^\circ = 9. \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{الطرف الأيسر} = 9. \text{ جا } 60^\circ = 9. \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

\* \* \* \* \*  
مثال ٨ :- برهن استخدام الآلة الحاسبة أو جد قيمته :- (1)  $9. \text{ جا } 60^\circ = 3. \text{ جا } 60^\circ + 6. \text{ جا } 30^\circ$

$$(2) \quad 9. \text{ جا } 60^\circ = 3. \text{ جا } 60^\circ + 6. \text{ جا } 30^\circ$$

\* \* \* \* \*  
أثبت أنه :- (1)  $9. \text{ جا } 60^\circ = 3. \text{ جا } 60^\circ + 6. \text{ جا } 30^\circ$

$$(2) \quad 9. \text{ جا } 60^\circ = 3. \text{ جا } 60^\circ + 6. \text{ جا } 30^\circ$$

$$(3) \quad 9. \text{ جا } 60^\circ = 3. \text{ جا } 60^\circ + 6. \text{ جا } 30^\circ$$



تمارين على الدوال المثلثية

□ اختر الإجابة الصحيحة :-

- (١)  $\sin 0^\circ$  ..... موجبة
- (٢)  $\cos 90^\circ$  ..... سالبة
- (٣)  $\tan 180^\circ$  ..... موجبة
- (٤) إذا كان  $\sin \theta = \frac{1}{2}$  ،  $\theta$  حادة فإنه  $\theta = \dots$
- (٥) إذا كان  $\cos \theta = -1$  ،  $\theta$  حادة فإنه  $\theta = \dots$
- (٦) إذا كانت  $\sin \theta = 0$  ،  $\theta$  حادة فإنه  $\theta = \dots$
- (٧) إذا كانت  $\cos \theta = \frac{1}{2}$  ،  $\theta$  حادة فإنه  $\theta = \dots$
- (٨) إذا كان  $\tan \theta = 1$  ،  $\theta$  حادة فإنه  $\theta = \dots$
- (٩)  $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ$  ..... تساوي
- (١٠) إذا كان  $\sin \theta = \frac{1}{2}$  ،  $\theta$  حادة فإنه  $\theta = \dots$
- (١١) إذا كان  $\cos \theta = \frac{1}{2}$  ،  $\theta$  حادة فإنه  $\theta = \dots$
- (١٢) إذا كان  $\tan \theta = \frac{1}{2}$  ،  $\theta$  حادة فإنه  $\theta = \dots$
- (١٣) إذا كان  $\sin \theta = 1$  ،  $\theta$  حادة فإنه  $\theta = \dots$
- (١٤) إذا كانت الزاوية  $\theta$  من الضلع الخامس لدائرة الوحدة يقطعها النقطتين  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  فإنه  $\theta = \dots$

□ اكتب إشارة كل من الدوال المثلثية الآتية :-

حـ  $30^\circ$  ،  $\tan 10^\circ$  ،  $\cos 90^\circ$  ،  $\sin 90^\circ$  ،  $\tan 90^\circ$  ،  $\cos 0^\circ$

□ أوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية  $\theta$  والتي يمر ضلعها النقطتين بالنقاط الآتية :-

- (١)  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  (٢)  $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  (٣)  $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

4. إذا كان  $\theta$  هو قياس زاوية موجبة من الوضع القياسي، والـ  $\theta$  يمر بـ  $\theta$  على المنحني  
بدائرة الوحدة، أوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية  $\theta$  من الحالات الآتية :-

$$(1) \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad (2) (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \quad (3) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad (4) \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

5. إذا كان الضلع المنحني للزاوية  $\theta$  من الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة من النقطة  
ب وكان  $\theta = \frac{\pi}{6}$  حيث  $\theta \in [0, \pi]$  فأوجد إحداثي ب  
ثم اثبت أنه  $\theta = \frac{\pi}{6}$  أو  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ .

6. أثبت أنه النقطة ب  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$  تقع على دائرة الوحدة وأوجد  $\theta$

7. إذا كان  $\theta = c$  وكان  $\theta \in [0, \pi]$  أوجد  $\theta$ .

8. بدو استخدام الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتي :-

$$(1) \sin 30^\circ + \cos 60^\circ + \tan 45^\circ \quad (2) \sin 60^\circ \times \cos 30^\circ + \tan 45^\circ$$

$$(3) \sin 30^\circ \cos 60^\circ + \tan 45^\circ \quad (4) \sin 60^\circ \cos 30^\circ - \tan 45^\circ$$

$$(5) \sin 60^\circ - \cos 30^\circ + \tan 45^\circ \quad (6) \sin 30^\circ \cos 60^\circ - \tan 45^\circ$$

9. اثبت صحة كل من المتساويات الآتية :-

$$(1) \sin 90^\circ = \cos 0^\circ$$

$$(2) \sin 60^\circ \cos 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$(3) \sin 30^\circ \cos 60^\circ = \frac{1}{4}$$

10. أوجد قيمة  $\theta$  إذا كان :-

$$(1) \sin \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(2) \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$$

11. إذا كانت  $\theta \in [0, \pi]$  أوجد قيمة  $\theta$  من كل مما يأتي

$$(1) \sin \theta = \frac{1}{2} \quad (2) \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

### (٤) الزوايا المنسبة

\* الزاويتان المنسبتان :- هما زاويتان الفرعه بغير قياسيهما أو مجموع قياسيهما  
يساوي عددًا صحيحًا واحد القوائم .

نمثلة :- \* الزاويتان ٢٠° ، ٤٠° زاويتان منسبتان لـ ٢٠ - ٤٠ = ٢٠ "عائنه"  
\* الزاويتان ٣٠° ، ٦٠° زاويتان منسبتان لـ ٣٠ + ٦٠ = ٩٠ "عائنه"

### II الدوال المثلثية للزاويتين المنسبتين $\theta$ و $(\theta - \alpha)$ :-

$$* \cos(\theta - \alpha) = \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha$$

$$* \sin(\theta - \alpha) = \sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha$$

$$* \tan(\theta - \alpha) = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos(\theta - \alpha)} = \frac{\sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha}{\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha}$$

$$\text{مثال :- } \bullet \cos ١٠^\circ = \cos(٦٠^\circ - ٥٠^\circ) = \cos ٦٠^\circ \cos ٥٠^\circ + \sin ٦٠^\circ \sin ٥٠^\circ$$

$$\bullet \sin ١٣٥^\circ = \sin(٩٠^\circ + ٤٥^\circ) = \sin ٩٠^\circ \cos ٤٥^\circ + \cos ٩٠^\circ \sin ٤٥^\circ$$

$$\bullet \cos ١٤٠^\circ = \cos(٩٠^\circ + ٥٠^\circ) = \cos ٩٠^\circ \cos ٥٠^\circ - \sin ٩٠^\circ \sin ٥٠^\circ$$

\* تدريبات \* أوجد ما يأتي :-  $\cos ١٥^\circ$  ،  $\sin ١٥^\circ$  ،  $\cos ١٣٥^\circ$  ،  $\sin ١٣٥^\circ$

### III الدوال المثلثية للزاويتين المنسبتين $\theta$ و $(\theta + \alpha)$ .

$$* \cos(\theta + \alpha) = \cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha$$

$$* \sin(\theta + \alpha) = \sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha$$

$$* \tan(\theta + \alpha) = \frac{\sin(\theta + \alpha)}{\cos(\theta + \alpha)} = \frac{\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha}{\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha}$$

$$\text{مثال :- } \bullet \cos ٢٠^\circ = \cos(٦٠^\circ - ٤٠^\circ) = \cos ٦٠^\circ \cos ٤٠^\circ + \sin ٦٠^\circ \sin ٤٠^\circ$$

$$\bullet \sin ٢٥^\circ = \sin(٩٠^\circ - ٦٥^\circ) = \sin ٩٠^\circ \cos ٦٥^\circ - \cos ٩٠^\circ \sin ٦٥^\circ$$

$$\bullet \cos ١٠^\circ = \cos(٥٠^\circ - ٤٠^\circ) = \cos ٥٠^\circ \cos ٤٠^\circ + \sin ٥٠^\circ \sin ٤٠^\circ$$

\* تدريبات \* أوجد ما يأتي :- جـا٠ع٠ ، جا٠د٠ ، جـا٠٠ ، جـا٠١٠ ، جـا٠١٠٠  
\* \* \*

٢ الدوال المثلثية للزوايا غير المنقبة  $\theta$  ،  $(\theta - 360)$  :-

$$* \text{جا}(\theta - 360) = \text{جا} \theta \quad * \text{جـا}(\theta - 360) = \text{جـا} \theta$$

$$* \text{جـب}(\theta - 360) = \text{جـب} \theta \quad * \text{كـا}(\theta - 360) = \text{كـا} \theta$$

$$* \text{ظا}(\theta - 360) = \text{ظا} \theta \quad * \text{ظـب}(\theta - 360) = \text{ظـب} \theta$$

مثال :-  $\bullet \text{جا} 330 = \text{جا}(\theta - 360) = \text{جا} 30 = \frac{1}{2}$

$\bullet \text{ظا} 310 = \text{ظا}(\theta - 360) = \text{ظا} 50 = 1$

$\bullet \text{كـا} 30 = \text{كـا}(\theta - 360) = \text{كـا} 60 = 0$

\* تدريبات \* أوجد ما يأتي :- جـب٠٠ ، جـب٠٢٠ ، جـب٠٣٠ ، جـب٠٣١٠  
\* \* \*

٣ الدوال المثلثية للزوايا غير المنقبة  $\theta$  ،  $\theta - 60$

$$* \text{جا}(\theta - 60) = \text{جا} \theta \quad * \text{جـا}(\theta - 60) = \text{جـا} \theta$$

$$* \text{جـب}(\theta - 60) = \text{جـب} \theta \quad * \text{كـا}(\theta - 60) = \text{كـا} \theta$$

$$* \text{ظا}(\theta - 60) = \text{ظا} \theta \quad * \text{ظـب}(\theta - 60) = \text{ظـب} \theta$$

مثال :-  $\bullet \text{جا} 60 = \text{جا}(\theta - 60) = \text{جا} 60 = \frac{1}{2}$

$\bullet \text{جـب} 60 = \text{جـب}(\theta - 60) = \text{جـب} 60 = \frac{1}{2}$

$\bullet \text{ظـب} 30 = \text{ظـب}(\theta - 60) = \text{ظـب} 30 = 3$

\* تدريبات \* أوجد ما يأتي :- ظا٠٠ ، ظا٠٣٠ ، ظا٠٣١٠ ، كـا٠٠ ، كـا٠٣٠ ، كـا٠٣١٠  
\* \* \*

مكتبة وسام

شؤون - شارع حنفى - مبارك خلف الثانوي - بنات

01004423597.3943035

□ الدوال المثلثية للزاوية  $\theta$ ،  $(\theta - 90^\circ)$  :-

$$\sin(\theta - 90^\circ) = -\cos \theta \quad \sin \theta = \cos(\theta - 90^\circ)$$

$$\cos(\theta - 90^\circ) = \sin \theta \quad \cos \theta = \sin(\theta - 90^\circ)$$

$$\tan(\theta - 90^\circ) = -\cot \theta \quad \tan \theta = -\cot(\theta - 90^\circ)$$

$$\cot(\theta - 90^\circ) = \tan \theta \quad \cot \theta = \tan(\theta - 90^\circ)$$

$$1 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin(\theta - 90^\circ)}{-\cos \theta} = \frac{\sin(\theta - 90^\circ)}{\cos \theta}$$

$$\sin \theta = \cos(\theta - 90^\circ) \quad \cos \theta = \sin(\theta - 90^\circ) \quad \tan \theta = -\cot(\theta - 90^\circ) \quad \cot \theta = \tan(\theta - 90^\circ)$$

$$\sin \theta = \cos(\theta - 90^\circ) \quad \cos \theta = \sin(\theta - 90^\circ) \quad \tan \theta = -\cot(\theta - 90^\circ) \quad \cot \theta = \tan(\theta - 90^\circ)$$

□ الدوال المثلثية للزاوية  $\theta$ ،  $(\theta + 90^\circ)$  :-

$$\sin(\theta + 90^\circ) = \cos \theta \quad \sin \theta = \cos(\theta - 90^\circ)$$

$$\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin \theta \quad \cos \theta = \sin(\theta - 90^\circ)$$

$$\tan(\theta + 90^\circ) = -\cot \theta \quad \tan \theta = -\cot(\theta - 90^\circ)$$

$$\cot(\theta + 90^\circ) = \tan \theta \quad \cot \theta = \tan(\theta - 90^\circ)$$

$$\sin \theta = \cos(\theta - 90^\circ) \quad \cos \theta = \sin(\theta - 90^\circ)$$

$$\tan \theta = -\cot(\theta - 90^\circ) \quad \cot \theta = \tan(\theta - 90^\circ)$$

$$\sin \theta = \cos(\theta - 90^\circ) \quad \cos \theta = \sin(\theta - 90^\circ) \quad \tan \theta = -\cot(\theta - 90^\circ) \quad \cot \theta = \tan(\theta - 90^\circ)$$

مثال :- إذا كانت الزاوية التي يحياها  $\theta$  من الوضع الصحيح ويرض على الدائرة بالقطعة

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right) \text{ أو } \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{4}\right) \text{ أو } \left(\frac{3}{4}, -\frac{4}{5}\right) \text{ أو } \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{4}\right)$$

$$\sin \theta = \frac{3}{4} \quad \cos \theta = \frac{4}{5} \quad \tan \theta = \frac{3}{4} \quad \cot \theta = \frac{4}{3}$$



٥ الدوال المثلثية للزاد  $\theta$ ،  $(\theta - 70^\circ)$  ::

$$\sin \theta = \sin(\theta - 70^\circ) \quad * \quad \cos \theta = \cos(\theta - 70^\circ)$$

$$\sin \theta = \sin(\theta - 70^\circ) \quad * \quad \cos \theta = \cos(\theta - 70^\circ)$$

$$\sin \theta = \sin(\theta - 70^\circ) \quad * \quad \cos \theta = \cos(\theta - 70^\circ)$$

$$\text{مثال} :: \sin 40^\circ = \sin(70^\circ - 30^\circ) = \sin 70^\circ \cos 30^\circ - \cos 70^\circ \sin 30^\circ$$

$$\sin 40^\circ = \sin 70^\circ \cos 30^\circ - \cos 70^\circ \sin 30^\circ$$

$$\sin 10^\circ = \sin(70^\circ - 60^\circ) = \sin 70^\circ \cos 60^\circ - \cos 70^\circ \sin 60^\circ$$

\* \* \* تدريبات \* \* \*  
أوجد ما يأتي ::  $\sin 40^\circ$  ،  $\cos 40^\circ$  ،  $\sin 10^\circ$

٦ الدوال المثلثية للزاد  $\theta$ ،  $(\theta + 70^\circ)$  ::

$$\sin \theta = \sin(\theta + 70^\circ) \quad * \quad \cos \theta = \cos(\theta + 70^\circ)$$

$$\sin \theta = \sin(\theta + 70^\circ) \quad * \quad \cos \theta = \cos(\theta + 70^\circ)$$

$$\sin \theta = \sin(\theta + 70^\circ) \quad * \quad \cos \theta = \cos(\theta + 70^\circ)$$

$$\text{مثال} :: \sin 30^\circ = \sin(70^\circ - 40^\circ) = \sin 70^\circ \cos 40^\circ - \cos 70^\circ \sin 40^\circ$$

$$\sin 30^\circ = \sin 70^\circ \cos 40^\circ - \cos 70^\circ \sin 40^\circ$$

$$\sin 10^\circ = \sin(70^\circ - 60^\circ) = \sin 70^\circ \cos 60^\circ - \cos 70^\circ \sin 60^\circ$$

\* \* \* تدريبات \* \* \*  
أوجد ما يأتي ::  $\sin 30^\circ$  ،  $\cos 30^\circ$  ،  $\sin 10^\circ$

مثال :: أوجد قيمة  $\sin 80^\circ \cos 10^\circ + \sin 10^\circ \cos 80^\circ$

$$\text{الحل} :: \sin 80^\circ \cos 10^\circ + \sin 10^\circ \cos 80^\circ = \sin(80^\circ + 10^\circ) = \sin 90^\circ = 1$$

$$\text{مثال} :: \sin 30^\circ = \sin(70^\circ - 40^\circ) = \sin 70^\circ \cos 40^\circ - \cos 70^\circ \sin 40^\circ$$

∴ قيمة المقدار  $\sin 10^\circ$  جا  $(-30^\circ)$  - ظاه  $c = 1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

هـ "علوظه هامة"

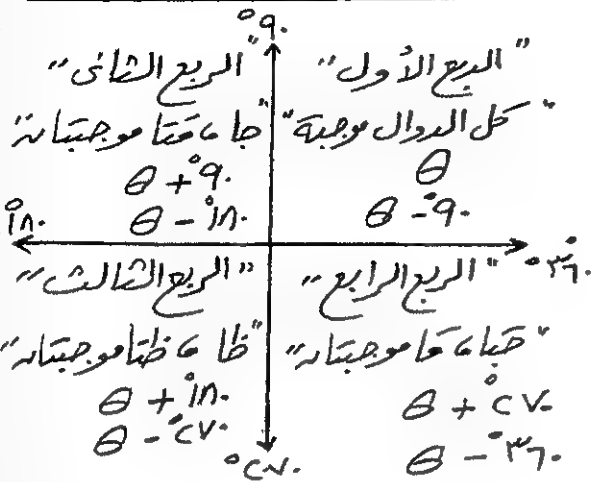
(1) يمكن تخمين ما سيعبر من الرسمه المقابلة:

(c) الدوال المثلثية  $(\theta + 90^\circ)$  و  $(\theta - 90^\circ)$

$(\theta + 270^\circ)$  و  $(\theta - 270^\circ)$  تتغير في

الدوال المثلثية بوضع حرف الناء من الداله التي

ليس بطل حرف الناء والعكس .



مثال ∴ أوجد بطريقتيه مختلفتين كل ما يأتي ∴ جا  $10^\circ$  و جا  $\frac{\pi}{3}$

الحل ∴

$$(1) \text{ جا } 10^\circ = \text{ جا } (30^\circ + 90^\circ)$$

$$= \text{ ظاه } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(2) \text{ جا } \frac{\pi}{3} = \frac{180^\circ \times 5}{3} = \frac{\pi}{3} \text{ جا } 30^\circ$$

$$= \text{ جا } (30^\circ + 270^\circ)$$

$$= -\text{ جا } 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ جا } 10^\circ = \text{ جا } (180^\circ - 70^\circ) = -\text{ جا } 70^\circ$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

أو

$$\text{ جا } 10^\circ = \text{ جا } (360^\circ - 340^\circ) = -\text{ جا } 340^\circ$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال ∴ بدور استخدام الحاسبه أوجد قيمة ∴

$$\text{ جا } (10^\circ - 30^\circ) + \text{ جا } \frac{\pi}{3} - \text{ جا } (180^\circ - \frac{\pi}{2}) - \text{ ظاه } 9^\circ$$

الحل ∴

$$\text{ جا } (10^\circ - 30^\circ) = \text{ جا } 10^\circ - \text{ جا } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\text{ جا } \frac{\pi}{3} = \text{ جا } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\frac{1}{e}} = 70 - \text{جبا} = (70 - 110) \text{جبا} = 10 - \text{جبا} = \left(\frac{110 \times 5}{3}\right) \text{جبا} = \left(\frac{\pi}{3}\right) \text{جبا} \therefore$$

$$\boxed{\frac{1}{e}} = 330 - \text{جا} = (30 - 330) \text{جا} = 30 - \text{جا} \therefore$$

$$\boxed{e7} = 205 - \text{كا} = (20 + 110) \text{كا} = 205 - \text{كا} = \left(\frac{110 \times 5}{2}\right) \text{كا} = \frac{\pi}{2} \text{كا} = \left(\frac{\pi}{2}\right) \text{كا} \therefore$$

$$\boxed{\text{صفر}} = 90 - \text{ظا} = (360 \times 5 - 90) \text{ظا} = 110 - \text{ظا} \therefore$$

$$\therefore \text{قيمة المقدار} = \frac{360}{e} \times \frac{360}{e} - \frac{1}{e} \times \frac{1}{e} + \frac{360}{e} \times \frac{360}{e} = \text{صفر} \times (e7 -)$$

$$\# \boxed{\Pi} = 0 - \frac{1}{e} + \frac{3}{e} =$$

\* \* \* ترتيب \* برون استخدام الحاسبة أو جدلية : \*

$$(1) \text{جبا } 10 - \text{جا } 330 - \text{جبا } (330 -)$$

$$(2) \text{جا } 90 - \text{جبا } (290 -) + \text{جا } 10 - \text{جبا } (20 -)$$

مثال : إذا كانت جبا  $\theta = \frac{\pi}{6}$  حيث  $90 > \theta > 110$  أوجد قيمه ما يأتي

$$(3) \text{جبا } (\theta -)$$

$$(1) \text{جا } (110 - \theta)$$

$$(4) \text{ظا } (110 - \theta)$$

$$(2) \text{جا } (360 - \theta)$$

الحل : : لأن نقطة على دائرة الوحدة  $\sin + \cos = 1$

$$\therefore \text{جبا } \theta = \frac{\pi}{6} \Leftarrow \text{النقطة هي } \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftarrow \left(\frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftarrow 1 + \frac{17}{20} = \frac{\pi}{6} \Leftarrow \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{17}{20} = \frac{9}{20}$$

$$\sin = \pm \sqrt{\frac{9}{20}} = \left(\pm \frac{3}{\sqrt{20}}\right) \therefore \theta \text{ تقع في الربع الثاني} \therefore \sin = \frac{3}{\sqrt{20}} \therefore \boxed{\frac{3}{\sqrt{20}}}$$

$$\therefore \text{جا } (110 - \theta) = \text{جا } \theta = \frac{3}{\sqrt{20}} \therefore \text{كا } (\theta - 110) = \text{كا } \theta = \frac{3}{\sqrt{20}} \therefore \boxed{\frac{3}{\sqrt{20}}}$$

$$\therefore \text{جبا } (\theta -) = \text{جبا } \theta = \frac{3}{\sqrt{20}} \therefore \text{ظا } (\theta - 110) = \text{ظا } \theta = \frac{3}{\sqrt{20}} \therefore \boxed{\frac{3}{\sqrt{20}}}$$

$$\text{ظا } \theta = (\text{ظا } \theta -) - = (\theta - 110) \text{ظا} =$$

$$\boxed{\frac{3}{\sqrt{20}}} =$$

الوحدة من النقطة (س)  $(\frac{12}{13})$  حيث  $(9. > \theta > 180)$  أو هـ قمية: -

۱۰ "موقوفه حمامه جبراً"

فجاءه  $\boxed{90^\circ = \beta + \alpha}$  حيث  $\alpha, \beta$  زاويتين حادتين متوالتين.

$$\dot{q} = \dot{r}_x - \theta \dot{c} + \dot{c} \dot{\lambda} + \theta \dot{r}_y \therefore (\dot{r}_x - \theta \dot{c}) \dot{\varphi} = (\dot{c} \dot{\lambda} + \theta \dot{r}_y) \dot{\varphi} \therefore$$

«لاحظ أنه توجد جميع أخرى تحقق المعادلة السابقة وتختصر بـ 9.6»

القانون العام لحل المعادلات على الصورة  $جا = جبا + أوجا = قبا + أوجا = ضبا$  :-

$$\omega \ni \alpha \quad \alpha \pi + \frac{\pi}{2} = \beta + \alpha \geq 1 \quad \alpha \pi + \frac{\pi}{2} = \beta + \alpha : \alpha \frac{1}{2} \beta \frac{1}{2} = \alpha \frac{1}{2} \alpha \frac{1}{2} \beta \frac{1}{2} \quad (5)$$

مثال :- أوجد الحل العام للمعادلات الآتية :-

$$(١) \quad \sin \theta = \sin 3\theta$$

$$(٢) \quad \sin \theta = \sin 2\theta$$

$$(٣) \quad \sin \theta = \sin 5\theta$$

$$(٤) \quad 1 = (\theta - \frac{\pi}{2})$$

الحل :-

$$(١) \quad \sin \theta = \sin 3\theta \Leftrightarrow \theta = 3\theta \text{ أو } \theta = \pi - 3\theta$$

$$\sin \theta = \sin 3\theta \text{ أو } \sin \theta = \sin (\pi - 3\theta)$$

$$\sin \theta = \sin 3\theta \text{ أو } \sin \theta = \sin (\pi - 3\theta)$$

$$\sin \theta = \sin 3\theta \Leftrightarrow \theta = 3\theta$$

$$\sin \theta = \sin 3\theta \Leftrightarrow \theta = \pi - 3\theta$$

∴ الحل العام هو  $\theta = \frac{\pi}{2}$  أو  $\theta = \frac{\pi}{6}$

$$(٢) \quad \sin \theta = \sin 2\theta \Leftrightarrow \theta = 2\theta \text{ أو } \theta = \pi - 2\theta$$

$$\sin \theta = \sin 2\theta \text{ أو } \sin \theta = \sin (\pi - 2\theta)$$

$$\sin \theta = \sin 2\theta \text{ أو } \sin \theta = \sin (\pi - 2\theta)$$

$$(٣) \quad \sin \theta = \sin 5\theta \Leftrightarrow \theta = 5\theta \text{ أو } \theta = \pi - 5\theta$$

$$(٤) \quad 1 = (\theta - \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + 1$$

$$\sin \theta = \sin 5\theta \Leftrightarrow \theta = 5\theta$$

$$\sin \theta = \sin 5\theta \Leftrightarrow \theta = \pi - 5\theta$$

∴ الحل العام هو  $\theta = \frac{\pi}{2}$  أو  $\theta = \frac{\pi}{5}$

$$(٥) \quad 1 = (\theta - \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + 1$$

∴  $\theta = \frac{\pi}{2} + 1$  (موجبة) ∴ تقع في الربع الأول أو الرابع

$$\frac{\pi}{2} = \theta \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \text{ أو } \theta = \frac{3\pi}{2}$$

∴ الحل العام هو  $\theta = \frac{\pi}{2}$  أو  $\theta = \frac{3\pi}{2}$

$$\sqrt{\pi} \frac{1}{7} + \pi \frac{1}{1c} = \theta$$

•  $N \pi \frac{1}{7} + \pi \frac{1}{10}$  هو

$$I \frac{\pi}{2} C \cdot I \ni \theta \hat{c}_\theta = 1 - \theta b_5 \quad (12)$$

$$] \pi \in [ \exists \theta \in \mathbb{R} . = \sqrt{V} + (\theta - \frac{\pi}{2}) \bar{\psi} \in (c)$$

جیب 6.1  $\pi$  = 3.14

الحل:  $\therefore (11) \because 1 - \theta b c \Leftarrow 1 = \theta b c \Leftarrow (\because) \Leftarrow \theta b c = \frac{1}{c}$  (موجبة)

∴ تقع فيه الربع الأول والثاني

الذي  $\Leftarrow \theta = \dot{\varphi}$  الثاني  $\Leftarrow \theta = \dot{\varphi} - \dot{\alpha} = 100 = \text{"حرف مضمة"}$

$$2\dot{r} - \dot{r} = 2 - 1 \therefore$$

$$\therefore \vec{r}_1 + \theta \vec{b}_2 \Leftarrow \therefore \vec{r}_1 + (\theta - \frac{\pi}{2}) \vec{b}_2 \Leftarrow \therefore \vec{r}_1 + (\theta - \frac{\pi}{2}) \vec{b}_2 \quad (5)$$

$$\frac{\overline{r}_1}{c} = \theta_1 \Leftrightarrow \overline{r}_1 = \theta_1 c \Leftrightarrow$$

∴ تقع ض الربيع الثالث أو الرابع ∴ الزاوية التي جيبها  $\frac{3}{4}$  هـ ٦٠°

الخاصة  $\epsilon_2 = \dot{\gamma}_0 + \dot{\alpha}_0 = 0$  الرابعة  $\epsilon_3 = \dot{\gamma}_0 - \dot{\alpha}_0 = 0$

$$\{^{\circ} \text{N. } 6^{\circ} \text{E. } 3\} = 2.5 \therefore$$

$$\sqrt{\frac{r}{z}} \pm = \theta \dot{\varphi} \Leftarrow \frac{r}{z} = \theta \dot{\varphi} \Leftarrow r = \theta \dot{\varphi} z \Leftarrow \cdot = r \theta \dot{\varphi} z \therefore \quad (15)$$

$$\frac{\sqrt{v}}{c} \pm = 0.6 \therefore$$

اما حبابه  $\frac{37}{2}$  (موجیه)

∴ تقع في الربع الأول والرابع

$$^{\circ} \mu \mu = ^{\circ} \mu - ^{\circ} \pi = 0.61^{\circ} \mu = 0 \therefore$$

أُمِّ قَبَاهٍ = قَبَاهٍ (سَالِبَةٍ)

..هـ تقدم من الربع الثاني أو الثالث

$$C_1 = \dot{r} + i\dot{n} = \theta e^{i\phi} \dot{\rho} = \dot{r} - i\dot{n} = \theta.$$

$$\{C1-6 \ 10-6 \ 33-6 \ 34\} = \{2-12\}$$

تمارين على الزوايا المنسبة

□ أمل ما يأتي :-

(١)  $\sin(180^\circ - \theta) = \dots$

(٢)  $\cos(90^\circ - \theta) = \dots$

(٣)  $\tan(90^\circ + \theta) = \dots$

(٤)  $\cot(180^\circ - \theta) = \dots$

(٥)  $\sec \theta = \dots$

(٦)  $\csc \theta = \dots$

(٧)  $\csc 67^\circ = \dots$

(٨)  $\sec 13^\circ = \dots$

(٩) إذا كانت  $\sin \theta = \cos \theta$  حيث  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  فإنه  $\theta = \dots$

(١٠) إذا كانت  $\sin \theta = \cos \theta$  حيث  $\theta$  زاوية حادة موجبة فإنه  $\theta = \dots$

(١١) إذا كان  $\sin \theta = \cos(90^\circ - \theta)$  فإنه  $\sin \theta = \dots$

(١٢) إذا كان  $\sin \theta = \cos \theta$  حيث  $\theta$  زاوية حادة موجبة فإنه  $\sin \theta = \dots$

(١٣) إذا كان  $\sin(180^\circ + \theta) = \sin \theta$  حيث  $\theta$  قياس أصغر زاوية موجبة فإنه  $\theta = \dots$

(١٤) إذا كان  $\sin \alpha = \sin \beta$  حيث  $\alpha, \beta$  زاويتان حادتان فإنه  $\sin(\alpha + \beta) = \dots$

(١٥) إذا كان  $\sin \theta = \cos \theta$  حيث  $\theta$  زاوية حادة موجبة فإنه  $\sin(90^\circ - \theta) = \dots$

(١٦) إذا كان  $\sin(90^\circ + \theta) = \frac{1}{2}$  حيث  $\theta$  أصغر زاوية موجبة فإنه  $\theta = \dots$

□ أوجد قيمة ما يأتي :-

(١)  $\sin 150^\circ + \cos 30^\circ + \tan 45^\circ$

(٢)  $\sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{3}$

□ أثبت أنه :-  $\sin 60^\circ + \cos 30^\circ + \tan 150^\circ = 1$

□ إذا كان الضلع المنطري لزاوية قياسها  $\theta$  في مثلث قائم الزاوية يقطع دائرة الوحدة

في النقطة  $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$  أوجد :-

(١)  $\sin \theta$  ، (٢)  $\cos \theta$  ، (٣)  $\tan \theta$  ، (٤)  $\cot \theta$  ، (٥)  $\sec \theta$  ، (٦)  $\csc \theta$

٥ أوجد إحدى قيم  $\theta$  حيث  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  التي تحقق كل معر :-

(١)  $\sin(10^\circ + \theta) = \sin(5^\circ - \theta)$  (٣)  $\cos(30^\circ + \theta) = \sin(20^\circ + \theta)$

(٢)  $\sin(10^\circ + \theta) = \cos(20^\circ + \theta)$  (٤)  $\sin(10^\circ + \theta) = \cos(20^\circ + \theta)$

٦ أوجد الحل العام لكل معر المعادلات الآتية :-

(١)  $\sin \theta = \sin \theta$  ، (٢)  $\sin \theta = \sin \theta$  ، (٣)  $\sin(28^\circ + \theta) = \sin(2^\circ - \theta)$

٧ أوجد جميع قيم  $\theta$  حيث  $\theta \in [0, \pi]$  التي تحقق كل معر :-

(١)  $\sin \theta - \sin \theta = 0$  (٢)  $\sin \theta - \sin \theta = 0$

(٣)  $\sin \theta = 1 - \sin \theta$  (٤)  $\sin(\theta - \pi) = \sin \theta$

٨ إذا كان  $\sin \theta = \frac{3}{4}$  ،  $\cos \theta = \frac{1}{4}$  ،  $\tan \theta = \frac{3}{1}$

أوجد أحضر قياس موجب للزاوية  $\theta$  .

٩ إذا كانت الزاوية  $\theta$  مرسومة في الربع الثاني حيث  $\sin \theta = 1$  ،  $\cos \theta = -1$

فحل تكلية أنه يكون  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ؟ منسرا جانبا .

١٠ "للمتقويين" أوجد قيمة كل مما يأتي

(١)  $\sin 0^\circ + \sin 6^\circ + \sin 12^\circ + \dots + \sin 174^\circ + \sin 180^\circ$

(٢)  $\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \dots + \sin 179^\circ + \sin 180^\circ$

مكتبة وسام

01004423597\_3943035



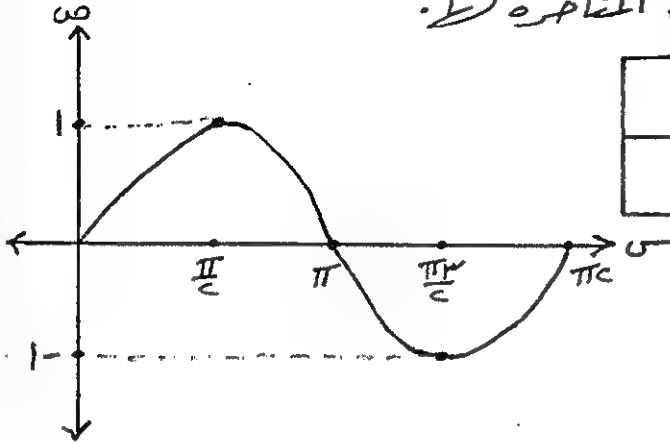
د) التحليل البياني للدوال المثلثية

□ دالة الجيب :-

لتحليل الدالة  $y = \sin(x)$  نكتب جدولاً لبعض قيم  $\theta$

الخاصة حيث  $\theta \in [0, \pi]$  وقيم  $\sin \theta$  المناظرة لها .

$\theta$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\sin \theta$	0	1	0	-1	0



نرسم منحنى الدالة كما بالشكل :-

\* خواص دالة الجيب :-

(١) الدالة دورية وطول دورتها  $2\pi$ .

(٢) مجال الدالة  $[-1, 1]$  وقيم الدالة  $[-1, 1]$

(٣) القيمة العظمى للدالة تساوي ١ وذلك عندما  $\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

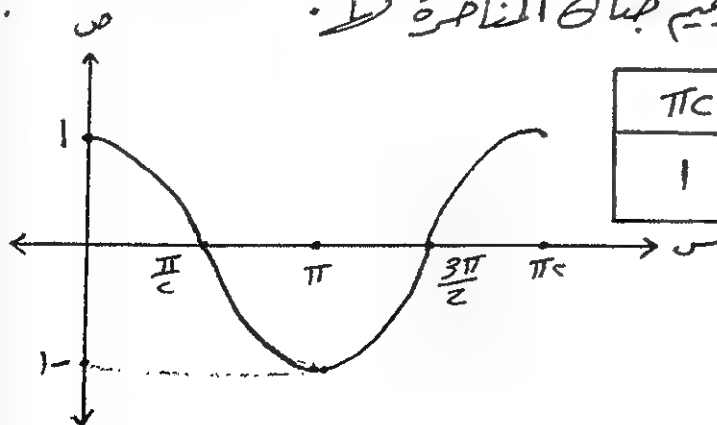
(٤) القيمة الصغرى للدالة تساوي -١ وذلك عندما  $\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

□ دالة جيب التمام :-

لتحليل الدالة  $y = \cos(x)$  نكتب جدولاً لبعض قيم  $\theta$

الخاصة حيث  $\theta \in [0, \pi]$  وقيم  $\cos \theta$  المناظرة لها .

$\theta$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\cos \theta$	1	0	-1	0	1



نرسم منحنى الدالة كما بالشكل :-

\* خواص دالة جيب التمام :-

(١) الدالة دورية وطول دورتها  $2\pi$ .

(١) مجال الدالة  $[-\infty, \infty]$  ومدى الدالة  $[-1, 1]$

(٢) القيمة العظمى للدالة تساوي ١ وذلك عند  $\theta = \pi/2$

أو  $\theta = 3\pi/2$

(٣) القيمة الصغرى للدالة تساوي -١ وذلك عند  $\theta = \pi$  أو  $\theta = 0$

ملحوظة هامة

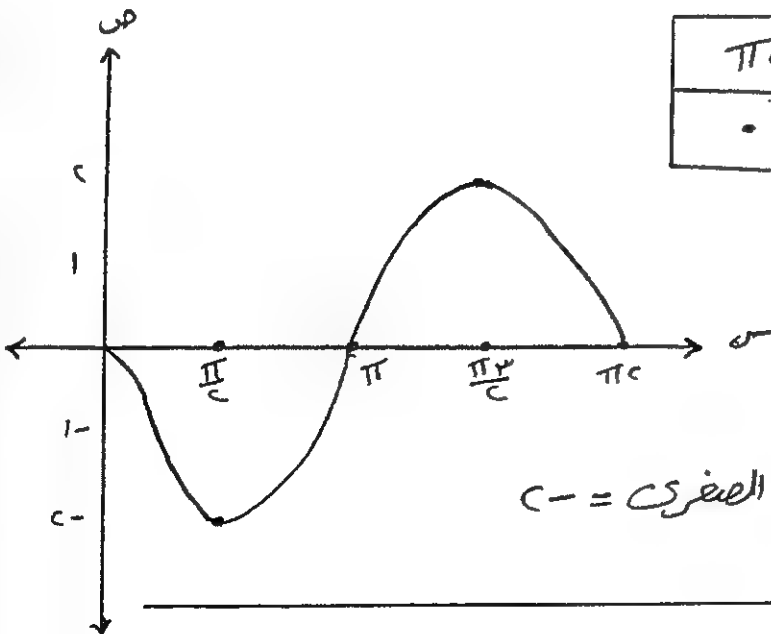
كل صيغة التفاضل:  $y = \sin x$  ،  $y = \cos x$  جتا  $x$  دالة دورية ودورتها  $\frac{\pi}{\omega}$  ومراحها  $[-\omega, \omega]$  حيث  $\omega$  موجبة .

نمثال :- • الدالة  $y = \sin x$  جتا  $x$  دورتها  $\frac{\pi}{1} = \pi$  ودورتها  $[-1, 1]$

• الدالة  $y = \cos x$  جتا  $x$  دورتها  $\frac{\pi}{1} = \pi$  ودورتها  $[-1, 1]$

مثال :- ارسم مخطط الدالة  $y = \sin x$  جتا  $x$  على الفترة  $[0, \pi]$

الخط :-



$\theta$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\sin \theta$	١	٠	-١	٠

الدالة دورية ودورتها  $\frac{\pi}{\omega}$

المجال  $[-\infty, \infty]$

المدى  $[-1, 1]$

القيمة العظمى للدالة  $y = \sin x$  جتا  $x$  هي القيمة الصغرى  $y = -1$

\* \* \* ارسم مخطط الدالة  $y = \sin x$  جتا  $x$  على الفترة  $[0, \pi]$  \* \* \*

تمارين على "رسم الدوال المثلثية"

□ أمل ما يأتي :-

- (١) مدى الدالة د حيث  $D = \theta$  جا  $\theta$  هو ..... وطول دورته ..... .
- (٢) مدى الدالة د حيث  $D = \theta$  جا  $\theta$  هو ..... وطول دورته ..... .
- (٣) القيمة العظمى للدالة ع :  $E = \theta$  جا  $\theta$  هو ..... .
- (٤) القيمة الصغرى للدالة ع :  $E = \theta$  جا  $\theta$  هو ..... .
- (٥) الدالة د  $D = \theta$  جا  $\theta$  دالة دورية ودورتها تساوي ..... .

□ ارسم الشكل البياني لكل من الدوال الآتية حيث  $\theta \in [0, 2\pi]$   
وعبر القيمة العظمى والصغرى والمدى لكل من الدوال الآتية

- |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| (١) د $D = \theta$ جا $\theta$      | (٣) ص $S = 3$ جا $\theta$           |
| (٢) ص $S = \frac{1}{2}$ جا $\theta$ | (٤) ص $S = \frac{2}{3}$ جا $\theta$ |
| (٥) ص $S = 3$ جا $\theta$           | (٦) ص $S = 6$ جا $\theta + 10$      |

"إيجاد قياس زاوية معلومة إحدى نسب المثلث"

\* إذا كانت  $\sin \theta = \frac{1}{2}$  فإنه يمكن إيجاد قيمة  $\theta$  معلومة  $\theta$

فمثلاً: إذا كانت  $\theta = 30^\circ \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$

"والسؤال هنا" هل يمكن إيجاد  $\theta$  معلومة  $\sin \theta = \frac{1}{2}$  !!

في هذه الصورة تستخدم لإيجاد  $\theta$  معلومة  $\sin \theta = \frac{1}{2}$

فإذا كانت  $\sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$

فمثلاً: إذا كانت  $\sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$  فإما  $\theta = 30^\circ$

"أي نجد على الزاوية الحادة الموجهة التي جيبها يساوي  $\frac{1}{2}$  و  $\sin 30^\circ$

ونكتب على الحاسبة بالصورة:  $\Rightarrow \sin^{-1}(\frac{1}{2}) = 30^\circ$

مثال ①: أوجد قيمة  $\theta$  حيث  $\theta > 0^\circ$  و  $\theta < 90^\circ$  والتي تحقق كل من

(١)  $\sin \theta = \frac{1}{2}$

(٢)  $\cos \theta = \frac{1}{2}$

(٣)  $\tan \theta = \frac{1}{2}$

(٤)  $\csc \theta = 2$

(٥)  $\sec \theta = 2$

(٦)  $\cot \theta = 2$

الحل:

(١) جيب تمام الزاوية موجب  $\therefore \theta$  تقع في الربع الأول أو الرابع

الاول  $\Rightarrow \theta = 30^\circ$

الرابع  $\Rightarrow \theta = 150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$

$\therefore$  قيم  $\theta = 30^\circ, 150^\circ$

(٢) ظل الزاوية موجب  $\therefore \theta$  تقع في الربع الأول أو الثالث

الاول  $\Rightarrow \theta = 60^\circ$

الثالث  $\Rightarrow \theta = 120^\circ = 90^\circ + 30^\circ$

$\therefore$  قيم  $\theta = 60^\circ, 120^\circ$

(٤) ∴ جيب الزاوية سالب ∴ تقع في الربع الثالث أو الرابع

$$\text{الثالث} \Leftarrow \theta = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ \quad \text{الرابع} \Leftarrow \theta = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$$

$$\therefore \text{قيم } \theta = 210^\circ \text{ أو } 330^\circ$$

$$(٥) \therefore \theta = 270^\circ \Leftarrow \theta = 270^\circ \text{ أو } 90^\circ$$

∴ جيب تمام الزاوية موجب ∴ تقع في الربع الأول أو الرابع

$$\text{الأول} \Leftarrow \theta = 60^\circ \quad \text{الرابع} \Leftarrow \theta = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$$

$$\therefore \text{قيم } \theta = 60^\circ \text{ أو } 300^\circ$$

(١) ∴ جيب الزاوية موجب ∴ تقع في الربع الأول أو الثاني

$$\text{الأول} \Leftarrow \theta = 30^\circ \quad \text{الثاني} \Leftarrow \theta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

(٦) ∴ ظل تمام الزاوية سالب ∴ تقع في الربع الثاني أو الرابع

$$\text{يستخدم الحاسبة} \leftarrow \tan^{-1}(-2) = -1.1071 \text{ راديان} = -63.43^\circ$$

$$\text{الثاني} \Leftarrow \theta = 180^\circ - 63.43^\circ = 116.57^\circ \quad \text{الرابع} \Leftarrow \theta = 360^\circ - 63.43^\circ = 296.57^\circ$$

$$\therefore \text{قيم } \theta = 116.57^\circ \text{ أو } 296.57^\circ$$

\* \* \* ترتيب \* أو جد θ حيث  $0^\circ < \theta < 360^\circ$  والتي تحقق كل معادلة

$$(١) \sin^{-1} \frac{1}{2} \quad (٢) \cos^{-1} \frac{1}{2}$$

$$(٣) \tan^{-1} 1 \quad (٤) \cot^{-1} 1$$

مثال ٥ ∴ إذا قطع الضلع النشط لزاوية موجبة قياسها θ من وسطها الضيق دائرة

الوحدة من النقطة ب  $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$  فأوجد θ حيث  $0^\circ < \theta < 360^\circ$

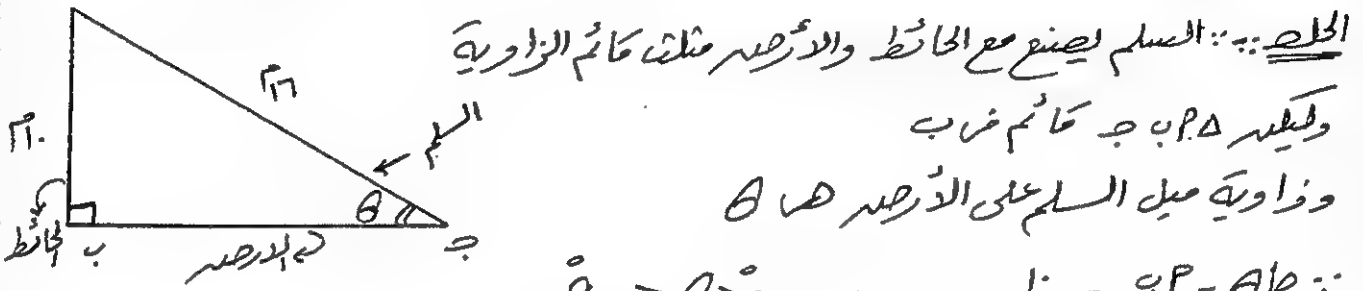
الحل ∴ ∴ النقطة ب  $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$  تقع في الربع الثاني ∴  $\sin \theta = \frac{4}{5}$   $\cos \theta = -\frac{3}{5}$

∴ الزاوية المرجعة تقع في الربع الثاني

$$\therefore \cos \theta = \frac{3}{5} \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \frac{3}{5} = \cos^{-1} 0.6$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1} \frac{3}{5} = \cos^{-1} 0.6$$

مثال ٣ سلم طوله ١٦ متر يستند على حائط رأس وأرض أفقية فإذا كان ارتفاع السلم عند سطح الأرض يساوي ١٠ متر أوجد بالراديان زاوية ميل السلم على الأرض  $\theta$



$$\therefore \cos \theta = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1} \frac{5}{8} = \cos^{-1} 0.625$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1} \frac{5}{8} = \cos^{-1} 0.625$$

تأديس على " إيجاد قياس زاوية معلومة إحدى نسب المثلث "

آلة :-

(١) إذا كان  $\cos \theta = 0.25$  حيث  $\theta$  حادة موجبة فإنه  $\theta = \cos^{-1}(0.25) = \dots$

(٢) إذا كان  $\cos \theta = 0.8$  وكانت  $90^\circ > \theta \geq 360^\circ$  فإنه  $\theta = \cos^{-1}(0.8) = \dots$

(٣) إذا كانت  $90^\circ > \theta \geq 360^\circ$  فأوجد  $\theta$  التي تحقق كلا ما يأتي :-

(١)  $\cos \theta = 0.376$  (٢)  $\sin \theta = 0.64$  (٣)  $\tan \theta = 0.57$

(٤) إذا قطع الضلع النشط للزاوية  $\theta$  من الضلع القياس دائرة الوحدة من النقطة

(نقطة ١) أوجد  $\theta$  حيث  $90^\circ > \theta \geq 360^\circ$

مثال ٤ سلم طوله ٢٠ متر يستند على حائط رأس فإذا كان ارتفاع السلم عند سطح الأرض ١٣ متر أوجد بالراديان زاوية ميل السلم على الأرض .

## تمارين عامة

أجب عن الأسئلة الآتية مقرباً الناتج لأقرب رقمين عشريين:

① حوّل الزوايا الآتية من درجات إلى راديان:

\_\_\_\_\_ ° ١٢٠ ① \_\_\_\_\_ ° ٦٤,٨ ② \_\_\_\_\_ ° ٢٢٠,٣٦ ③

② حول الزوايا الآتية من راديان إلى درجات:

\_\_\_\_\_  $\frac{\pi}{3}$  ① \_\_\_\_\_  $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$  ② \_\_\_\_\_  $\frac{\pi}{4}$  ③

③  $\theta$  زاوية مركزية في دائرة طول نصف قطرها  $١٠$  وتحتصر قوساً طوله  $١٢$ :

\_\_\_\_\_ إذا كان  $١٠ = \text{سم}$ ،  $\theta = ١,٢$  أوجد  $ل$ . ①

\_\_\_\_\_ إذا كان  $ل = ٢٦$  سم،  $١٨ = \text{سم}$  أوجد  $\theta$  بالدرجات. ②

④ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتي:

\_\_\_\_\_ ظا  $١٢٠^\circ$  ① \_\_\_\_\_ جتا  $(\frac{\pi}{4})$  ② \_\_\_\_\_ جتا  $٣٣^\circ$  ③ \_\_\_\_\_ ظتا  $(-٢٠٠^\circ)$  ④ \_\_\_\_\_ قتا  $(\frac{\pi}{4})$  ⑤

⑤ أوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية  $\theta$  إذا كان الضلع النهائي مرسوماً في الوضع القياسي ويمر بكل نقطة من النقاط الآتية:

\_\_\_\_\_  $(٣, ٤)$  ① \_\_\_\_\_  $(١٢, -٥)$  ② \_\_\_\_\_  $(٢, -\frac{2}{3})$  ③ \_\_\_\_\_  $(٢, ٥٦)$  ④

⑥ أثبت أن:

أولاً: جتا  $٦٠^\circ = ٢$  جتا  $٣٠^\circ$  جتا  $٣٠^\circ$  ثانياً: جتا  $٣٠^\circ = ٢$  جتا  $٦٠^\circ$  - ١

⑦ إذا كانت جتا  $\theta = -\frac{4}{5}$  حيث  $٩٠^\circ < \theta < ١٨٠^\circ$  فأوجد قيمة كل من:

أولاً: جتا  $(\theta - ١٨٠^\circ)$  ثانياً: ظا  $(\theta - ١٨٠^\circ)$

⑧ أوجد قياس الزوايا بالدرجات في الفترة  $0^\circ \leq \theta \leq ٣٦٠^\circ$  لكل مما يأتي:

\_\_\_\_\_ ظا  $١$  ① \_\_\_\_\_ جتا  $(\frac{1}{3})$  ② \_\_\_\_\_ جتا  $(-\frac{3}{4})$  ③ \_\_\_\_\_ ظا  $(-٣٦)$  ④

⑨ منحدرًا طوله  $٢٤$  متراً، وارتفاعه عن سطح الأرض  $٩$  أمتار، اكتب دالة مثلثية يمكن استخدامها لإيجاد قياس زاوية ميل المنحدر مع الأرض الأفقية، ثم أوجد قياسها.

## اختبار الوحدة

اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاه.

- ١) الزاوية  $٥٨٥^\circ$  تكافئ في الوضع القياسي الزاوية التي قياسها:
- ٤٥ ☐ ١٣٥ ☐ ٢٢٥ ☐ ٣١٥ ☐

- ٢) إذا كان  $\theta > ٠$ ، فما  $\theta$  فإن زاوية تقع  $\theta$  في الربع:
- الأول ☐ الثاني ☐ الثالث ☐ الرابع ☐

- ٣) إذا كانت  $\theta$  زاوية حادة وكان  $\text{جا } (\theta + ٢٠) = \text{جتا } ٢٠$  فإن  $\theta$  تساوي:
- ٢٠ ☐ ٢٠ ☐ ٤٠ ☐ ٥٠ ☐

- ٤) الزاوية  $(-٨٥٠)$  تقع في الربع:
- الأول ☐ الثاني ☐ الثالث ☐ الرابع ☐

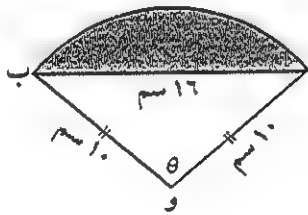
- ٥) قياس الزاوية بالدرجات التي تقابل قوساً طوله  $\pi$  في دائرة طول نصف قطرها ٩ سم تساوي:
- ٣٠ ☐ ٦٠ ☐ ١٢٠ ☐ ١٥٠ ☐

- ٦) أبسط صورة للمقدار:  $\text{جتا } (\theta + ١٨٠) + \text{جا } (\theta + ٩٠)$  يساوي:
- ٢ ☐ ٢ ☐ ٢ ☐ ٢ ☐

- ٧)  $\text{ظا } (-٢٠)$  تساوي:
- $-\frac{1}{\sqrt{3}}$  ☐  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  ☐  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$  ☐  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  ☐

أجب عن الأسئلة الآتية:

- ٨)  $\widehat{AB}$  قوس في دائرة مركزها  $O$  وطول نصف قطرها ١٠ سم،  $AB = ١٦$  سم. أوجد  $\theta$  بالقياس الدائري ثم أوجد طول القوس  $\widehat{AB}$ :



- ٩) إذا كان  $٩٠^\circ < \theta < ١٨٠^\circ$  حيث  $\theta = ٤$  أوجد قيمة المقدار  $\text{جا } (\theta - ١٨٠) + \text{ظا } (\theta - ٣٢٠) + ٢$  جا  $(\theta - ٣٧٠)$ .

- ١٠) أوجد في أبسط صورة قيمة المقدار:  $\text{جتا } ١٢٠^\circ - \text{جتا } ٣٣^\circ - \text{جتا } ٤٢^\circ$  جا  $(-٣٠)$ .

- ١١) أوجد بالرديان  $\theta$  إذا كان  $٢ \text{ جتا } \theta + ٣ = ٠$  حيث  $\theta$  قياس زاوية حادة.

- ١٢) إذا كان الضلع النهائي للزاوية في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة عند النقطة  $(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$  فأوجد قيمة كل من:  $\theta$ ،  $\text{قا } \theta$ .

- ١٣) أوجد الدوال المثلثية الأساسية للزاوية  $\theta$  إذا كان الضلع النهائي مرسومًا في الوضع القياسي ويمر بالنقطة  $(٦، -٨)$ .



## اختبار تراكمي

أولاً: أسئلة الاختيار من متعدد

١١) أى من الزوايا الآتية يكون الجيب وجيب التمام لها سالبين:

٣٣٠°

٢٢٠°

١٤٠°

٤٠°

١٢) قياس الزاوية المركزية التي تقابل قوساً طوله  $\pi^2$  في دائرة طول نصف قطرها ٦ سم يساوى:

$\frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{6}$

١٣) إذا كان  $\theta = \theta_2$  ظلًا  $\theta = \theta_2$  حيث  $\theta$  زاوية حادة موجبة فإن  $\theta_2$  تساوى:

١

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{1}{2}$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

١٤) إذا كان الضلع النهائي للزاوية  $\theta$  فى الوضع القياسى يقطع دائرة الوحدة عند النقطة  $(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$  فأوجد قيمة كل من ظل  $\theta$ ، قتا  $\theta$ .

١٥) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد (إن أمكن ذلك) قيمة كل من:

ظل  $(-\frac{\pi}{3})$

قا  $\frac{\pi}{3}$

جا  $(-135^\circ)$

جتا  $210^\circ$

١٦) إذا كان الضلع النهائي للزاوية  $(\theta - 90^\circ)$  حيث  $\theta$  زاوية حادة موجبة، يقطع دائرة طول نصف قطرها ٥ وحدات طول فى النقطة  $(\epsilon, \kappa)$  فأوجد:

قيمة  $\kappa$

جتا  $(\theta - 90^\circ)$

جا  $(\theta - 90^\circ)$

قا  $(\theta - 90^\circ)$

١٧) دلائل: يصعد كريم بدراجته منحدرًا يميل على الأفقى بزاوية قياسها  $100^\circ$  فى الوضع القياسى

اكتب دالة مثلثية تبين العلاقة بين أطول المنحدر.

أوجد قيمة الأقرب عددين عشريين.

مكتبة وسام

شوقين - شارع حسني مبارك - خلف الثانوية بنات

01004423597.3943035

الابداع

في الرياضيات

ثالثاً:

الهندسة

# الوحدة الثالثة (التشابه)

(١) تشابه المضلعات

(٢) تشابه المثلثات

(٣) تابع تشابه المثلثات

(٤) العلاقة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين

(٥) تطبيقات التشابه في الدائرة

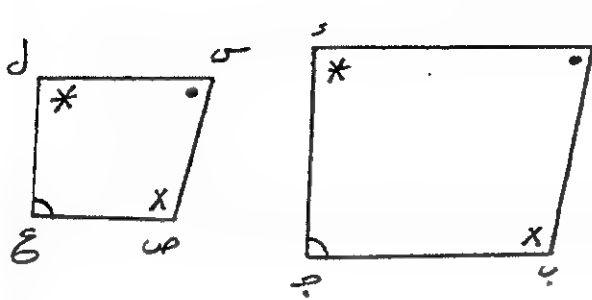
## تمارين عامة علي الوحدة

### اختبار الوحدة

(١) تشابه المضلعات

تعريف :-

يقال لمضلعين (مختلفين العدد من الأضلاع) أنهما متشابهان إذا تحققت الشرطين التاليين معًا :-  
(١) الزوايا المتناظرة متساوية من القياس (مطابقة) .



(٢) أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة .  
من الشكل المقابل :- إذا كان :-

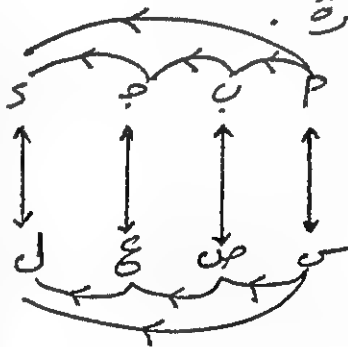
$$\textcircled{1} \quad \frac{PQ}{AB} = \frac{QR}{BC} = \frac{RS}{CD} = \frac{SP}{DA} \quad \text{و} \quad \angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R, \angle D = \angle S$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{PQ}{AB} = \frac{QR}{BC} = \frac{RS}{CD} = \frac{SP}{DA} = k$$

فإن المثلث  $PQR$  متشابه للمثلث  $ABC$  والعلامة  $\sim$  تسمى التشابه

ملحوظات هامة :-

(١) يجب كتابة المضلعين المتشابهين بنفس ترتيب رؤسهما المتناظرة .



فإذا كان المثلث  $PQR$  متشابه للمثلث  $ABC$  فإنه

$$\frac{PQ}{AB} = \frac{QR}{BC} = \frac{PR}{AC} \quad \text{و} \quad \angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R$$

$$\text{و} \quad k = \frac{PQ}{AB} = \frac{QR}{BC} = \frac{PR}{AC} \quad \text{تسمى "معامل التشابه"}$$

• ويكون معامل تشابه المثلث  $PQR$  للمثلث  $ABC$  هو  $k$  .

→ ملاحظة

• أما معامل تشابه المثلث  $ABC$  للمثلث  $PQR$  فهو  $\frac{1}{k}$  .

(٢) لكن تشابه مضلعين يجب توافر الشرطين معًا ولا يكفي توافر أحدهما دون الآخر .

مثلاً :-  
• المربع والمستطيل مضلعان غير متشابهان (لماذا؟)

• المربع والمضلع مضلعان غير متشابهان (لماذا؟)

• ليست جميع المستطيلات متشابهة وكذلك المثلثات ومتوازيات الأضلاع

١٣ المضلعان المتطابقان متشابهان ويكون معامل التشابه = ١ (هوية)

١٤ المضلعان المتشابهان لهما نفس عدد أضلاع متشابهان.

١٥ أي مضلع منتظم لهما نفس العدد من الأضلاع متشابهان.

مثلاً :- • جميع المثلثات المتساوية الأضلاع متشابهة

• جميع المربعات متشابهة • جميع الأشكال الخماسية المنتظمة متشابهة وهكذا...

١٦ إذا كان المضلع  $m$  له المضلع  $n$  فإذن  $\frac{\text{محيط المضلع } m}{\text{محيط المضلع } n} = \text{معامل التشابه}$

أي أنه :- النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين = النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما

١٧ لكي يكون له هو معامل تشابه المضلع  $m$  للمضلع  $n$

\* إذا كان  $k < 1$  فإنه المضلع  $m$  هو تصغير للمضلع  $n$ .

\* إذا كان  $k > 1$  فإنه المضلع  $m$  هو تكبير للمضلع  $n$ .

\* إذا كان  $k = 1$  فإنه المضلع  $m$  يطابق المضلع  $n$ .

مثال ١ :- خذ الشكل المقابل :-

المضلع  $P$  ب ج د ه المضلع ه و ز ح

(١) أوجد معامل تشابه المضلع  $P$  ب ج د ه للمضلع ه و ز ح

(٢) أوجد قيم  $x$  و  $y$

(٣) إذا كان محيط المضلع  $P$  ب ج د ه = ٢٥ سم . أوجد محيط المضلع ه و ز ح .

الحل :- المضلع  $P$  ب ج د ه المضلع ه و ز ح

فيكون  $\frac{P}{H} = \frac{B}{Z} = \frac{C}{H} = \frac{D}{Z} = \frac{E}{H}$  معامل التشابه

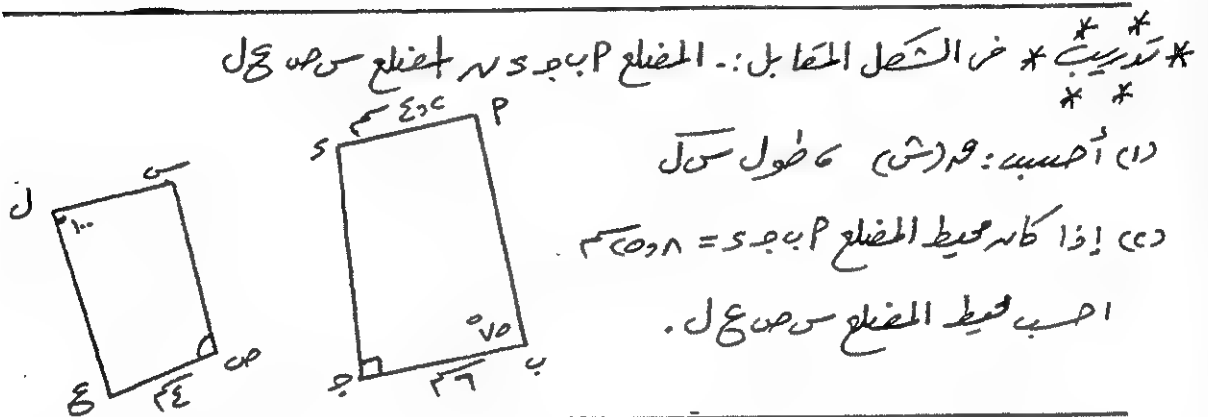
$$\frac{25}{x} = \frac{15}{y} = \frac{10}{5} = \frac{20}{7} = \frac{2+5}{7} \Rightarrow \frac{15}{y} = \frac{10}{5} = \frac{20}{7} \Rightarrow \frac{15}{y} = \frac{4}{7} \Rightarrow y = \frac{15 \times 7}{4} = \frac{105}{4}$$

$$9 = \frac{7 \times 12}{8} = c + 12 \Leftrightarrow \frac{12}{8} = \frac{c+12}{7} \text{ بحسب } \frac{12}{12} = \frac{12}{12} = 1 \Leftrightarrow \frac{12}{8} = \frac{12}{7} \therefore$$

$$c+12 = 9 \Leftrightarrow c = -3$$

$$\frac{3}{4} = \frac{20}{\text{محيط المضلع هـ وزح}} \Leftrightarrow \text{معامل التناسب} = \frac{\text{محيط المضلع بـ جـ د}}{\text{محيط المضلع هـ وزح}}$$

$$\therefore \text{محيط المضلع هـ وزح} = \frac{c \times 20}{3} = \frac{12 \times 20}{3} = 80$$



مثال ٥ :- مضلعاه متشابهاه أهدها أطوال أضلاعه ١٠، ٨، ٦، ٥، ٣، ٣

والآخر محيطه ٤٨ سم . أوجد أطوال أضلاعه المضلع الثاني .

الحل :- بفرض المضلعاه هما P بـ جـ د هـ زح س من ع ل م

حيث P بـ جـ د هـ زح س من ع ل م = 120 سم ، س من ع ل م = 48 سم ، د هـ زح = 3 سم ، جـ د = 5 سم ، بـ جـ د = 6 سم ، هـ زح = 10 سم

ومحيط المضلع س من ع ل م = 48 سم

∴ المضلع P بـ جـ د هـ زح س من ع ل م

« فواصل التناسب »

$$\frac{\text{محيط المضلع بـ جـ د هـ زح}}{\text{محيط المضلع س من ع ل م}} = \frac{120}{48} = \frac{10}{3} = \frac{5}{2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\left[ \frac{3}{2} \right] = \frac{3}{2} = \frac{10+8+6+5+3}{28} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14} = \frac{7}{28} = \frac{5}{28} = \frac{3}{28} \Leftrightarrow$$

$$\therefore 3 = 28 \times \frac{3}{28} = 3, 5 = 28 \times \frac{5}{28} = 5, 6 = 28 \times \frac{6}{28} = 6, 10 = 28 \times \frac{10}{28} = 10, 3 = 28 \times \frac{3}{28} = 3$$

#



❶ اكل ما يُأْتِي :-

(c) أى مضاعف من مضاعف لـ  $\alpha$  نفس العدد من الضلع  $\alpha$  يكونه

(٤٦) المثلثان المتساويان الاضلاع .....

(٦) إذا كانت النسبة بين طولي ضلعين متناظرين في مثلثين متشابهين  $c$  فإن

النسبة بين  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  و  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  .....

(٧) مضاعفاته متساوية النسبة يسير طولي ضلعيه متناظرين فيها ٣:٤ فإذا كان

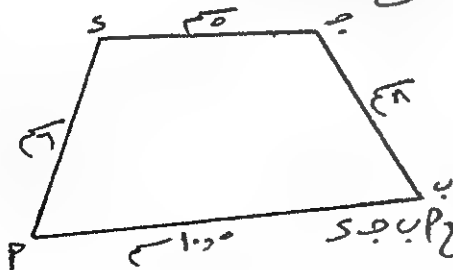
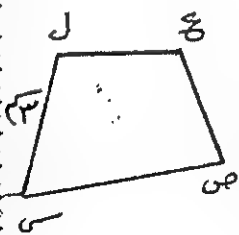
محيط المضلع الأصفر ٥ اسم خياره محيط المضلع الأكبر ..... اسم .

(n) إذا كان المصلحة  $P$  و  $S$  و  $N$  المصلحة من أجل غاية :-

$$\dots X_{UP} = \delta X_{UP} * \mathcal{I} \quad \frac{\dots}{\delta \omega} = \frac{\omega}{\delta \omega} *$$

$$\frac{س\ ب}{ب\ پ} = \frac{\text{قيط المظلع} \dots\dots\dots}{\text{قيط المظلع} \dots\dots\dots} \quad \text{ج} \quad \frac{س + \dots\dots\dots}{س} = \frac{\text{ب ج} + \text{س ج}}{\text{س ج}}$$

۲) من الشغل المقابل :- المضلع P بجوہ نہ اضلاع منہ عمل



خفا کا  $\rho = 1.0$  سم  $6.6 = \rho$

6 ج 5 = 56 = 65 = 56 = 65

آؤہ :-

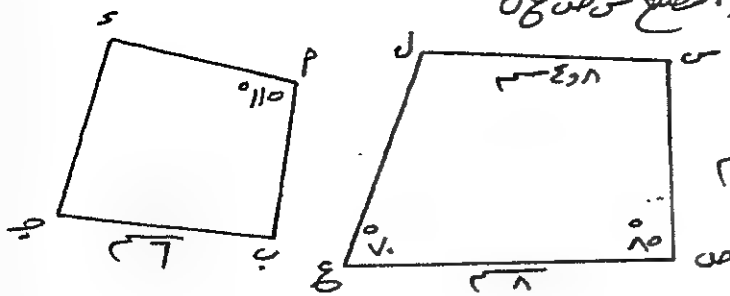
(c) ۵۰۶۷۸۹۱۰

۳) مستطیل بدهاں آہم ، آہم اورد محیط و مساحہ مستطیل آخر مشابہ تہ

إذا كان  $p$  - معامل التشابه  $= 3$   $c$  - معامل التشابه  $= 6$   $b$  - معامل التشابه  $= 8$  و



٤ خ الشكل المقابل :- المضلع P ب ج د ه المضلع س من عمل



(د) أجب م (د س ج) ، طول P

(هـ) إذا كان محيط المضلع P ب ج د ه = 19,0

أوجد محيط المضلع س من عمل .

٥ المضلع P ب ج د ه المضلع س من عمل فإذا كان P ب ج د ه = 3,0 ، ب ج د ه = 2,0

س من = 1 - 3,0 ، ه ج = 1 + 3,0 . أوجد قيمة م الزاوية

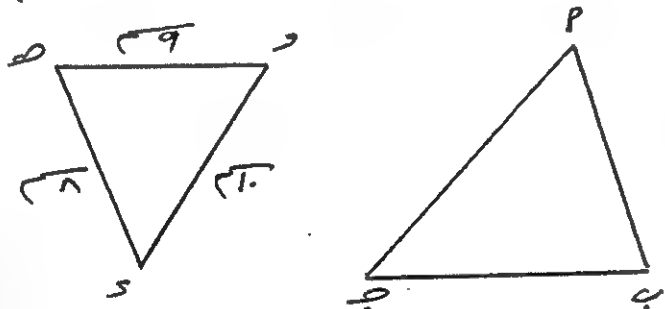
٦ مستطيل م متشابه لـ بعد الأول 8 سم ، 12 سم ، ومحيط الثاني 100 سم

طول المستطيل الثاني ومساحته .

٧ علبة على شكل مستطيل طوله 12 سم وعرضه 8 سم هل هذا المستطيل يقرب من

المستطيل الذهب ؟ ولماذا ؟

٨ علبة على شكل مستطيل ذهب طوله 12 سم أجب عن هذه العلبة لأقرب سم .



٩ خ الشكل المقابل :-

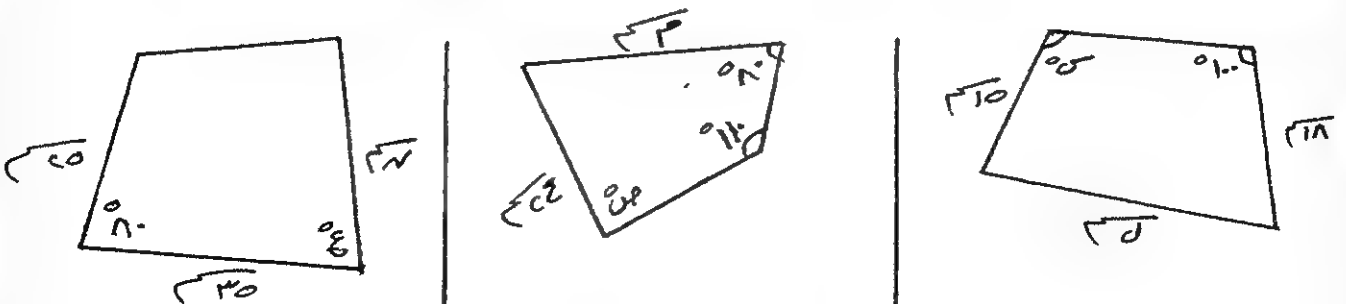
P ب ج د ه س ه و

د ه = 8 سم ، ه و = 9 سم ، و د = 10 سم

إذا كان محيط P ب ج د ه = 11 سم

أوجد أطوال أضلاع P ب ج د ه

١٠ المضلعان الثلاثي القابلية متشابهة . أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس .

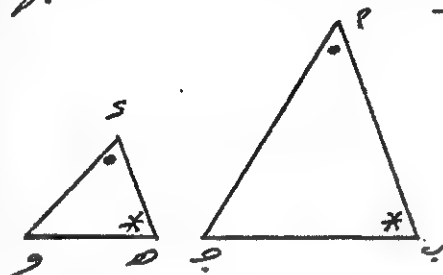


## ٤٠) تشابه المثلثات

**تعريف :-** في الدرس السابق علمنا أنه لكي يتشابه مثلعاين يجب أن يتحقق شرطا لتشابه  
معا ولا يكفي تحقق أحدهما دون الآخر

أما في المثلثات فقد علمنا في الصف الثاني الإعدادي أنه لكي يتشابه مثلعاين  
تحقق شرط واحد فقط من الشرطين السابقين ذكرهما.

**ملاحظة :-** إذا طبقت زاويتاه في مثلث فطائرتاه في مثلث آخر كانه المثلثان متشابهين



\* من النكل المقابل :-  $\angle A \equiv \angle P$   $\angle B \equiv \angle Q$   $\angle C \equiv \angle R$

فإنه  $\triangle ABC \sim \triangle PQR$  وهو وينبع من التشابه أنه :-

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} \quad \text{أو} \quad \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

مكتبة وسام

ش.ع. ح.ع. مبارك. خ.ع. الثانوية بنات  
01004423597.3943035

\* حالات خاصة \*

① المثلثان المتساويان الأضلاع متشابهان .

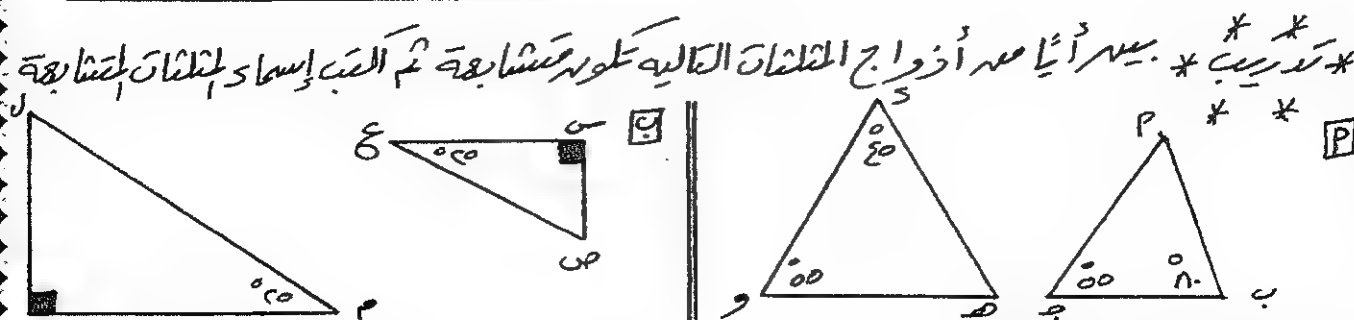
② يتشابه المثلثان القائم الزاوية إذا سادت قياس إحدى الزاويتين الحادتين

في أحدهما قياس إحدى الزاويتين الحادتين في الآخر .

③ يتشابه المثلثان المتساويان الساقين :-

\* إذا سادى قياس إحدى زاويتي القاعدة في أحدهما قياس إحدى زاويتي القاعدة في الآخر

\* إذا سادى قياس زاوية الرأس في أحدهما قياس زاوية الرأس في الآخر .

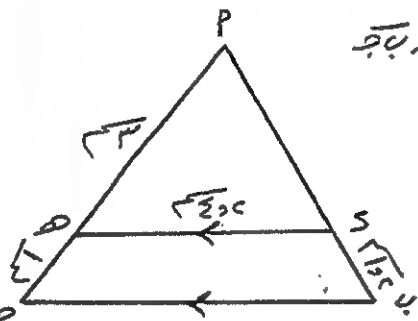
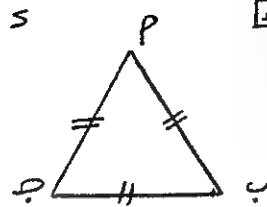
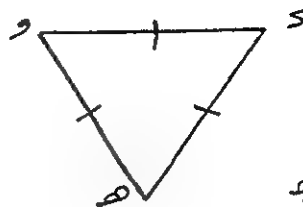
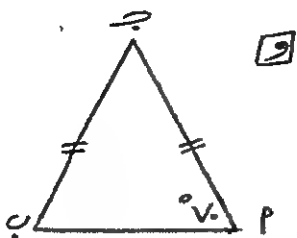
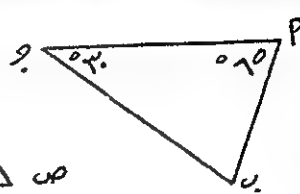


أ / جميل غالي السيد

(١٠٦)

الفصل الدراسي الأول

# الابداع في الرياضيات



(۱) اُجبتُ أنْ Δ SP Δ N Δ P بوج

(c) اوسط طول کل منہ  $\bar{x}_P$  ، بچہ

الحليم :- 35 // 36

$\therefore \rho(\hat{M}) = \rho(\hat{N}), \rho(\hat{M}) = \rho(\hat{P})$  "بالتناظر"

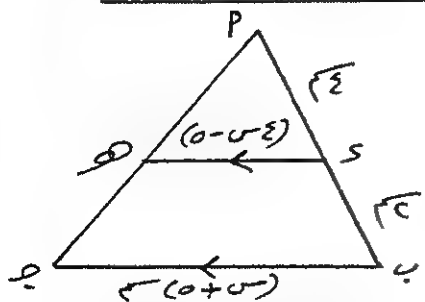
[illegible]

∴  $\Delta SP \sim \Delta P \sim \Delta P$  ويتبع من النتائج :-

$$\frac{r}{\Sigma} = \frac{\Sigma DC}{\Sigma C} = \frac{SP}{IC + SP} \leftarrow \frac{\partial P}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial C} = \frac{SP}{CP}$$

$$\text{في } 0.7 = \frac{\Sigma X \Sigma DC}{\Sigma} = 0.7 \leftarrow$$

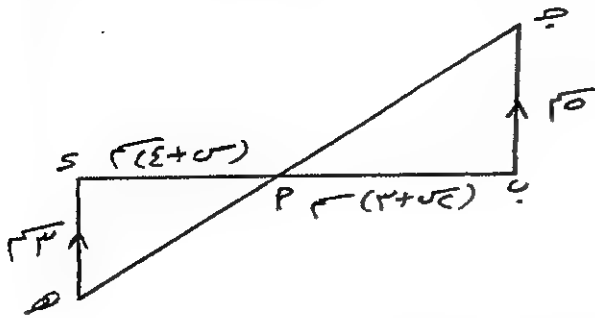
$$\sqrt{3,7} = 5P \Leftarrow 3,7 + 5P \xrightarrow{r} 5P \Leftarrow (1,7 + 5P) \xrightarrow{r} 5P \Leftarrow$$



\* تدريجت \* من الشكل المقابل \*

اُجبتُ انْ Δ ب ب Δ P Δ N Δ SP Δ

نم اوهبقيه من العربيه



مثال ٥) في الشكل المقابل :-

اثبت أنه  $\Delta PAB \sim \Delta PDC$  و  $AP = PC$   
ثم أوجد قيمة  $s$  العددية.

الحل :- :- ببساطة //

:-  $\angle B = \angle D$  (م.م) ،  $\angle A = \angle C$  (م.م) "بالتقابل"

في  $\Delta PAB$  و  $\Delta PDC$  و  $PA = PC$  و  $PB = PD$

$\angle B = \angle D$  (م.م)

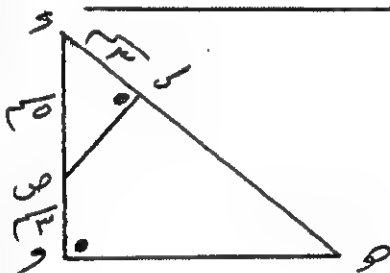
$\angle A = \angle C$  (م.م)

"بالتقابل بالرأس"  $\angle APB = \angle CPD$

:-  $\Delta PAB \sim \Delta PDC$  و  $PA = PC$

$$(4+s) \cdot 3 = (3+s) \cdot 3 \Leftrightarrow \frac{4}{3} = \frac{3+s}{4+s} \Leftrightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{PC}{PD} = \frac{PA}{PC}$$

$$11 = s \Leftrightarrow 10 + 5 = 9 + s$$

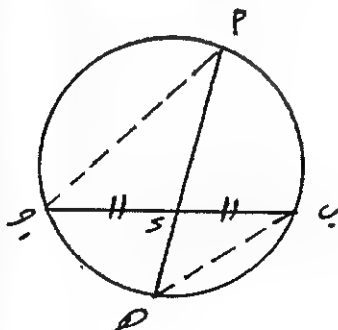


\* \* \* تدريبات \* في الشكل المقابل :-

\* \* \* اثبت أنه  $\Delta SAB \sim \Delta SDC$  و

ثم أوجد طول  $SC$

مثال ٦) :-  $AP$  و  $BQ$  وتران متقاطعان في دائرة في نقطة  $S$  حيث  $S$  منتصف  $BQ$



اثبت أنه  $(BS) = (AS)$  و  $AP = BQ$

البرهان :- الحل :- نضع  $BQ$  و  $AP$

في  $\Delta SAP$  و  $\Delta SBQ$  و  $BS = AS$  و  $AP = BQ$

:-  $\angle P = \angle Q$  (م.م) محيطيتان مشتركتان في  $Q$

:-  $\angle A = \angle B$  (م.م) بالتقابل بالرأس

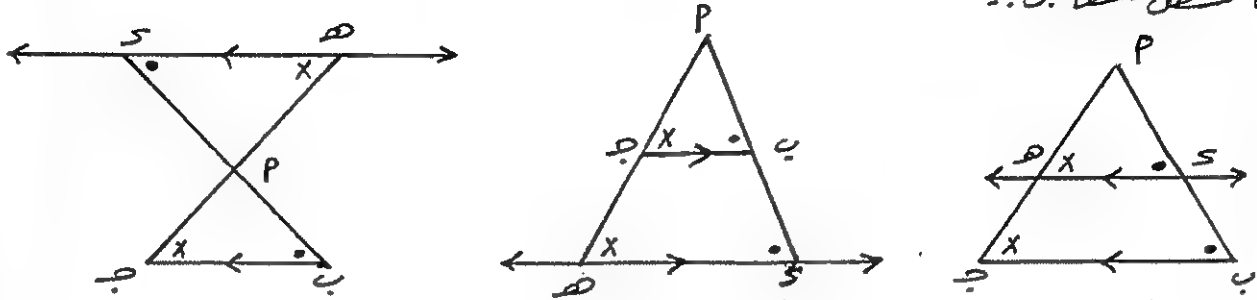
:-  $\Delta SAP \sim \Delta SBQ$  و  $BS = AS$  و  $AP = BQ$  و  $BS = AS$  و  $AP = BQ$

$$\# \quad SP \times PS = (S) \Leftrightarrow \frac{SP}{S} = \frac{PS}{S} \quad \therefore$$

هذه "نتائج هامة"

⊗ نتيجة (١) :- إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين أو المستقيمين الحاملين لهما فإنه المثلث الناتج يشابه المثلث الأصلي.

من الشكل المقابل :-



إذا كان  $AB \parallel PQ$  ويقطع  $PB$  في  $P$  و  $PS$  في  $S$  على الترتيب

فإنه  $\triangle SPB \sim \triangle SPS$

مثال (٢) :- من الشكل المقابل :-

$PB \parallel PS$  ،  $PS \parallel PB$  ، رسم  $AB \parallel PQ$

ويقطع  $PB$  في  $P$  و  $PS$  في  $S$  و  $AB \parallel PQ$  ويقطع  $PB$  في  $P$  و

برهنة أنه  $\triangle SPB \sim \triangle SPS$

الطلب :-  $\therefore$   $AB \parallel PQ$   $\therefore \triangle SPB \sim \triangle SPS$   $\leftarrow$  (١)

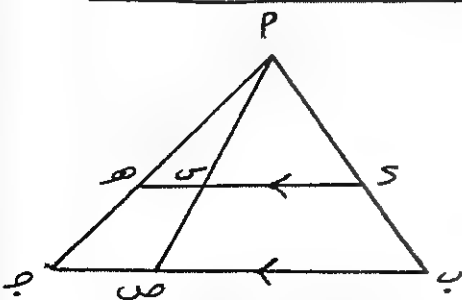
$\therefore$   $AB \parallel PQ$   $\therefore \triangle SPB \sim \triangle SPS$   $\leftarrow$  (٢)

من (١) ، (٢) يتبع أنه  $\triangle SPB \sim \triangle SPS$   $\#$

مثال (٣) من الشكل المقابل :-

(١) اذكر ثلاثة أزواج من المثلثات المتشابهة

$$(٢) \text{ أثبت أنه } \frac{SP}{PS} = \frac{PS}{SP} = \frac{PS}{PS}$$



جميل غالي السيد

$$C \leftarrow \frac{dp}{dp} = \frac{ds}{ds} = \frac{sp}{sp} \Leftarrow \text{supra normal}$$

©  $\leftarrow \frac{SP}{\text{مجموع}} = \frac{SS}{\text{مجموع}} = \frac{SP}{\text{مجموع}} \leftarrow \text{مجموع } SP \text{ و } SS \text{ متناسب است.}$

$$C \leftarrow \frac{\partial p}{\partial p} = \frac{0.5}{0.4} = \frac{0.5}{0.4} \approx 0.4090909090909091$$

*(Signature)*

$$\# \frac{S}{P} = \frac{S}{P} = \frac{S}{P} \therefore$$

في الشكل المقابل :-

۵۵. فرض  $P \subseteq P \cup S$  و  $P \subseteq P \cup S$  صحیح است.

ب.   $\angle P = 90^\circ$ ,  $\angle RPS = 90^\circ$ ,  $\angle RPQ = 90^\circ$  مشتركة

$\textcircled{I} \leftarrow \text{DUP} \Delta N \text{PUS} \Delta \therefore$

• خضر ۵۵۵ PS ج ۶۶ PS ج فیٹا :-

$$P(\hat{J} \leq P) = P(\hat{J} \leq P) = P(\hat{J} \leq P)$$

(II)  $\leftarrow \phi \cup P \Delta \sim \phi \cap S \Delta \therefore$

(I)  $G \subseteq II$   $\therefore [A \leftarrow (\Delta P \cup \Delta N \cap \Delta P \cup \Delta S)]$   
 "علو قه هاوه"

عنه النكل الساجد والعلامة <sup>رحمته</sup> عليهما استغنا عن نظريات أقليدس :-

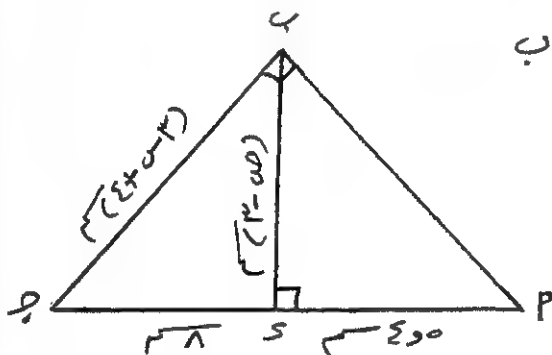
$$\frac{P_C}{P_U} = \frac{0.5}{0.9} \Leftarrow \text{PUP 6 PUS } \Delta\Delta \text{ a.w.m. } \textcircled{1}$$

$\therefore P(B) = \sum_{j=1}^n P(A_j|B)$

⑤ منه تشابه  $\Delta P \Delta \Delta$  و  $P \Delta \Delta$   $\Leftarrow \frac{P \Delta}{\Delta \Delta} = \frac{P \Delta}{\Delta \Delta}$  أي أنه  $P \Delta$  وسط متناسب بين  $\Delta \Delta$  و  $\Delta \Delta$   $\therefore (P \Delta) = \Delta \Delta \times \Delta \Delta$

③ منه تشابه  $\Delta P \Delta \Delta$  و  $P \Delta \Delta$   $\Leftarrow \frac{P \Delta}{\Delta \Delta} = \frac{P \Delta}{\Delta \Delta}$  أي أنه  $P \Delta$  وسط متناسب بين  $\Delta \Delta$  و  $\Delta \Delta$   $\therefore (P \Delta) = \Delta \Delta \times \Delta \Delta$

② منه تشابه  $\Delta P \Delta \Delta$  و  $P \Delta \Delta$   $\Leftarrow \frac{P \Delta}{\Delta \Delta} = \frac{P \Delta}{\Delta \Delta}$   $\therefore \frac{P \Delta \times P \Delta}{\Delta \Delta} = P \Delta$  ومنه  $P \Delta \times P \Delta = P \Delta \times \Delta \Delta$



مثال ⑤: من الشكل المقابل:  $P \Delta \Delta$  مثلث قائم ضيق

بني  $\perp P \Delta$  ،  $SP = 8$  ،  $SR = 2$  ،  $PS = 8$

أوجد قيمة  $SR$  من

الحل:  $\therefore P \Delta \Delta$  مثلث قائم الزاوية من  $P$

$\therefore P \Delta \perp P \Delta$

$\therefore P \Delta \Delta \sim P \Delta \Delta \sim P \Delta \Delta$  "ونستخرج نظريات أقليدس"

(٧)  $\therefore (P \Delta) = P \Delta \times P \Delta \Leftarrow (8+2) = 8 \times 2 = 16$

$\therefore 8+2 = 16$

أو  $8+2 = 16$

أو  $8+2 = 16$

مفروضه  $\frac{12}{3} = 4 \Leftarrow 12 = 3 \times 4$

$\frac{12}{3} = 4 \Leftarrow 12 = 3 \times 4$

(٧)  $\therefore (P \Delta) = P \Delta \times P \Delta \Leftarrow (3-4) = 4 \times 8 = 32$

$\therefore 3-4 = 32$

أو  $3-4 = 32$

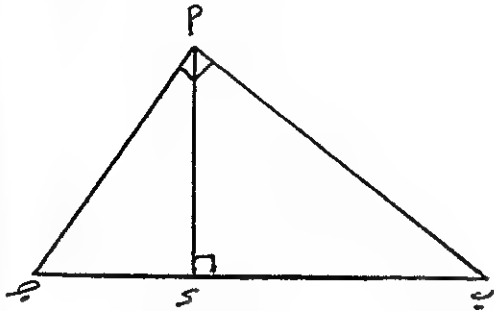
أو  $3-4 = 32$

# مفروضه  $\frac{12}{3} = 4$

$\frac{12}{3} = 4$

\* \* \* \* \* خالص المقابل :-

\* \* \* \* \*  $\Delta PAB$  قائم الزاوية عند  $P$  ،  $AP \perp AB$  الطلب :-



$$\frac{AP}{AS} = \frac{AB}{AP} \quad (1)$$

$$\frac{AP}{AS} = \frac{AB}{AP} \quad (1)$$

$$\frac{AP}{AS} = \frac{AB}{AP} \quad (2)$$

$$\frac{AP}{AS} = \frac{AB}{AP} \quad (2)$$

$$\dots \times \dots = (PS) \quad (3)$$

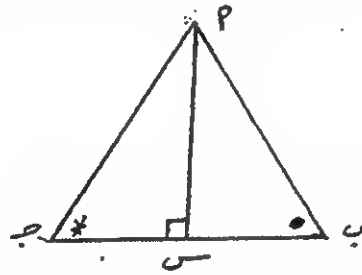
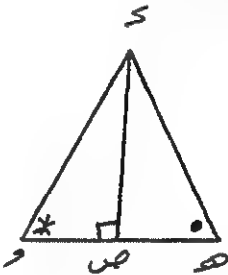
$$\frac{AP}{AS} = \frac{AB}{AP} \quad (3)$$

$$\frac{AP \times \dots}{AB} = AS \quad (4)$$

$$\dots \times \dots = (P) \quad (4)$$

مثال ٦ :-  $\Delta PAB$  ،  $S$  هو مثلثه متساوية الساقين . رسم  $AS \perp AB$  ليقتطعه عند  $S$

ورسم  $AS \perp AB$  ليقتطعه عند  $S$  . أثبت أنه  $BS \times AS = PS \times AS$  الطلب :-



الحل :-  $\Delta PAB$  ،  $S$  هو مثلثه متساوية الساقين

$$\therefore \angle (P) = \angle (B) \quad \angle (A) = \angle (S) \quad \angle (P) = \angle (B)$$

من  $\Delta PAB$  ،  $S$  هو مثلثه متساوية الساقين

$$\therefore \angle (P) = \angle (B) \quad \angle (A) = \angle (S) \quad \angle (P) = \angle (B)$$

$$\therefore \Delta PAB \sim \Delta ASB \text{ ونستخرج أنه } \frac{AP}{AS} = \frac{BS}{AS} = \frac{AB}{AS} \quad (1)$$

من  $\Delta PAB$  ،  $S$  هو مثلثه متساوية الساقين

$$\therefore \angle (P) = \angle (B) \quad \angle (A) = \angle (S) \quad \angle (P) = \angle (B)$$

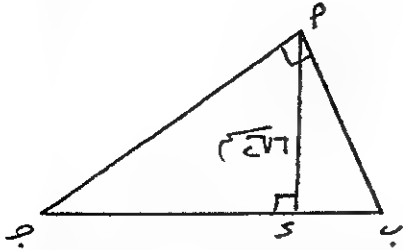
$$\therefore \Delta PAB \sim \Delta ASB \text{ ونستخرج أنه } \frac{AP}{AS} = \frac{BS}{AS} = \frac{AB}{AS} \quad (2)$$

$$\text{من (1) ، (2) } \frac{AP}{AS} = \frac{BS}{AS} \Rightarrow \boxed{AP \times AS = BS \times AS} \quad \#$$

مثال ٧ :-  $\Delta PAB$  قائم الزاوية عند  $P$  ، رسم  $AS \perp AB$  ليقتطعه عند  $S$

إذا كان  $\frac{BS}{AS} = \frac{1}{2}$  ،  $SP = 2$  سم أوجد طول كل من  $AS$  ،  $AB$  ،  $AP$





الطلب :-  $\therefore \frac{1}{2} = \frac{PD}{BC} \Rightarrow PD = 3$   $\Rightarrow PD = 3$   $\Rightarrow PD = 3$

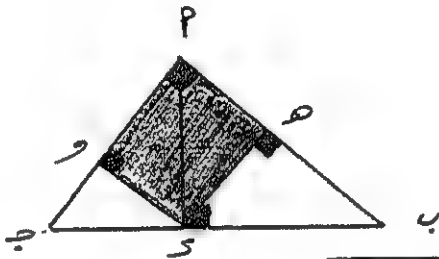
$\therefore PD = 3$   $\Rightarrow PD = 3$   $\Rightarrow PD = 3$

$\therefore PD = 3$   $\Rightarrow PD = 3$   $\Rightarrow PD = 3$

$\therefore PD = 3$   $\Rightarrow PD = 3$   $\Rightarrow PD = 3$

$\therefore PD = 3$   $\Rightarrow PD = 3$   $\Rightarrow PD = 3$

$\therefore PD = 3$   $\Rightarrow PD = 3$   $\Rightarrow PD = 3$



مثال ١ :- في الشكل المقابل :-  $PD \perp BC$   $\Rightarrow PD \perp BC$   $\Rightarrow PD \perp BC$

$\therefore PD \perp BC$   $\Rightarrow PD \perp BC$   $\Rightarrow PD \perp BC$

أثبت أنه (1)  $\triangle PDC \sim \triangle PDB$

(2) مساحة المثلث  $PDC = \frac{1}{2} \times PD \times DC$

الطلب :-  $\therefore \frac{1}{2} \times PD \times DC = \frac{1}{2} \times PD \times DB$

$\therefore DC = DB$   $\Rightarrow DC = DB$   $\Rightarrow DC = DB$

$\therefore \triangle PDC \sim \triangle PDB$  (I)  $\Rightarrow \triangle PDC \sim \triangle PDB$

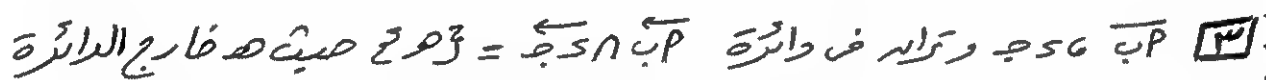
$\therefore \triangle PDC \sim \triangle PDB$   $\Rightarrow \triangle PDC \sim \triangle PDB$

$\therefore \triangle PDC \sim \triangle PDB$   $\Rightarrow \triangle PDC \sim \triangle PDB$

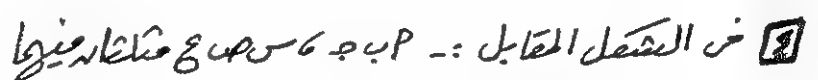
$\therefore \triangle PDC \sim \triangle PDB$   $\Rightarrow \triangle PDC \sim \triangle PDB$

$\therefore \triangle PDC \sim \triangle PDB$   $\Rightarrow \triangle PDC \sim \triangle PDB$

❖ أذكر الحالات التي يكون فيها المشاع حساسا بلحظه وفي حالة التشابه أذكر سبب التشابه



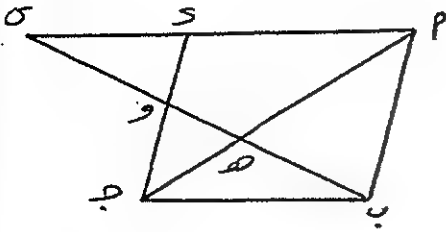
نعم اوصد طول جدّه



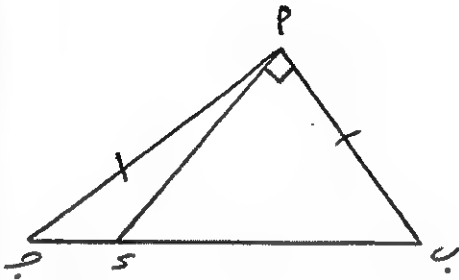
$$\sqrt{1} = 1, \sqrt{4} = 2, \sqrt{9} = 3, \sqrt{16} = 4$$

□ فرض  $p \Delta q$  :  $p \leq q$  ،  $p \in \overline{q}$  و  $p \hat{=} q$  (مساوی) =  $(p \Delta q)$

اثبت ان  $\rho \chi \rho = (\rho \chi \rho)$



٦ من الشكل المقابل :-  $P$  ب ج د متوازي أفلايح  
و د ح ج د ، رسم ب ج قطع  $P$  ج ح د وقطع  $P$  ح د  
اثبت أنه (١)  $P \Delta H \sim \Delta B H$  (٢)  $H$  ج د  
(٣)  $(H \Delta B) = H \Delta X$



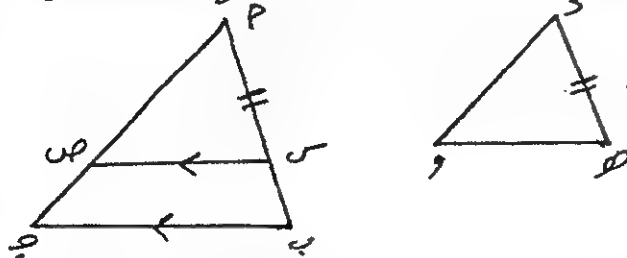
٧ من الشكل المقابل :-  
 $P$  ب ج مثلث منفرج الزاوية  $P$   $P = B$   
رسم  $P \perp P$  ويقطع  $P$  ج د  
اثبت أنه  $C(P) = C(B) = X$

٨ أراد سليمان أن يعرف ارتفاع سارية العلم الذي في مدرسته فوضع مرآة على بعد  
٥ أمتار من قاعدة السارية ثم تحرك إلى الخلف مسافة ١ متر وكانت عيناه  
على ارتفاع ٥ دأتر فوق سطح الأرض فإذا كانت قدماه والمرآة والسارية  
على استقامة واحدة أوجد ارتفاع السارية  
"علماً بأنه زاوية السقوط = زاوية الانعكاس"

٣) "تابع / تشابه المثلثات"

نظرية (١) :-

إذا تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة من مثلثين فإنهما يشابهان.



المعطيات :-  $\triangle PAB \sim \triangle PCD$  و  $PA = PC$  و  $PB = PD$

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PD} = \frac{AB}{CD}$$

المطلوب :-  $\triangle PAB \sim \triangle PCD$

الحل :- عن طريق  $PA = PC$  ،  $PB = PD$  ، ارسم  $AC$  و  $BD$  و  $AC \parallel BD$  و  $AC = BD$

البرهان :-  $\therefore AC \parallel BD$   $\therefore \triangle PAB \sim \triangle PCD$   $\therefore PA = PC$  و  $PB = PD$

$$\text{و يكون } \frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PD} = \frac{AB}{CD} \therefore PA = PC \text{ و } PB = PD$$

$$\therefore \frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PD} = \frac{AB}{CD} \text{ (١) } \therefore \frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PD} = \frac{AB}{CD} \text{ (٢) } \therefore \frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PD} = \frac{AB}{CD}$$

$$\text{من (١) و (٢) } \Rightarrow AC \parallel BD \text{ و } AC = BD$$

"الأضلاع المتناظرة متطابقة"

"المثلثان المتطابقان يكونان متشابهين"

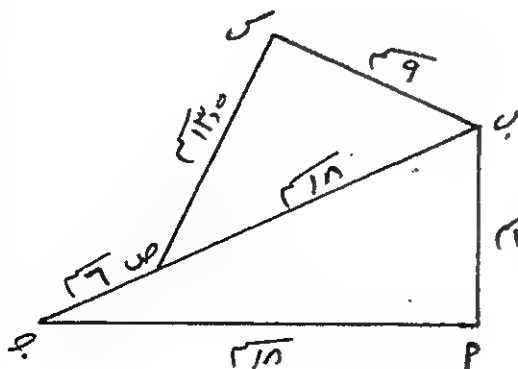
"برهاناً"

$$\therefore \triangle PAB \sim \triangle PCD$$

$$\therefore \triangle PAB \sim \triangle PCD$$

$$\therefore \triangle PAB \sim \triangle PCD$$

$$\therefore \triangle PAB \sim \triangle PCD \quad \#$$



مثال (١) :- في الشكل المقابل :-

ب، د، هـ على المستقيمة واحدة

أثبت أنه : (١)  $\triangle PAB \sim \triangle PCD$  و  $PA = PC$  و  $PB = PD$

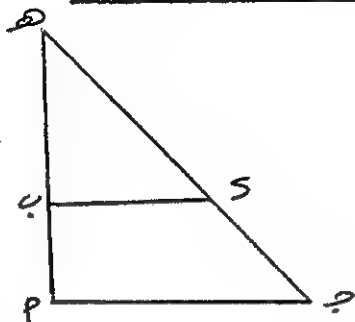
(٢)  $PA = PC$  و  $PB = PD$

الحل :- في  $\triangle PAB$  و  $\triangle PCD$  ،  $PA = PC$  و  $PB = PD$  و  $AB \parallel CD$   $\therefore \triangle PAB \sim \triangle PCD$

$$\frac{2}{3} = \frac{17}{1350} = \frac{P}{S} \quad \frac{2}{3} = \frac{7+17}{18} = \frac{P}{S} \quad \frac{2}{3} = \frac{14}{9} = \frac{P}{S}$$

$$\therefore \frac{P}{S} = \frac{P}{S} = \frac{P}{S} \quad (\text{الضلع المتناظر متناسبة})$$

$\therefore \triangle P \sim \triangle S$   $\#$  وتبين من التشابه أن الزوايا المتناظرة متساوية  
 من (P) = من (S) أي أن  $P$  ينصف  $S$   $\#$



مثال ١٠ :- في الشكل المقابل :-  $P \sim S$   $\#$   $P$  ينصف  $S$

$$\text{حيث } \frac{PS}{SH} = \frac{PH}{HS} \quad \& \quad \frac{PS}{SH} = \frac{PH}{HS}$$

أثبت أن  $PS \parallel HS$

$$\therefore \frac{PS}{SH} = \frac{PH}{HS} \Rightarrow \frac{PS}{SH} = \frac{PH}{HS}$$

"من خواص التناسب"

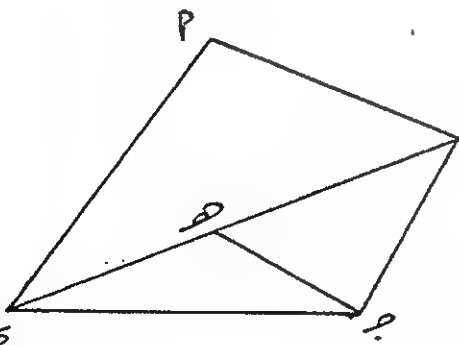
$$\therefore \frac{PS}{SH} = \frac{PH}{HS} \Rightarrow \frac{PS}{SH} = \frac{PH}{HS}$$

$$\text{من } \& \& \text{ يتبع أن: } \frac{PS}{SH} = \frac{PH}{HS}$$

أي أن  $\triangle P \sim \triangle S$   $\#$  وتبين أن

من (P) = من (S) "وهنا وضعنا تناظر"

$$\# \quad PS \parallel HS$$



مثال ١١ :- في الشكل المقابل :-  $P \sim S$   $\#$   $P$  ينصف  $S$

$$\text{حيث } \frac{PS}{SH} = \frac{PH}{HS} \quad \& \quad \frac{PS}{SH} = \frac{PH}{HS}$$

أثبت أن :- (١)  $PS \parallel HS$   $\&$  (٢)  $P$  ينصف  $S$

$$\therefore \frac{PS}{SH} = \frac{PH}{HS} \Rightarrow \frac{PS}{SH} = \frac{PH}{HS}$$

$$\therefore \frac{PS}{SH} = \frac{PH}{HS} \Rightarrow \frac{PS}{SH} = \frac{PH}{HS}$$

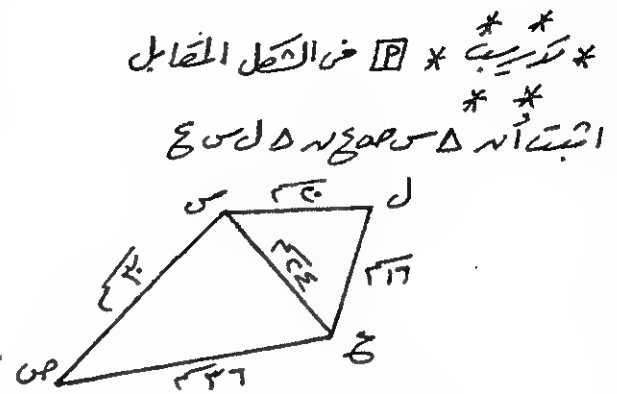
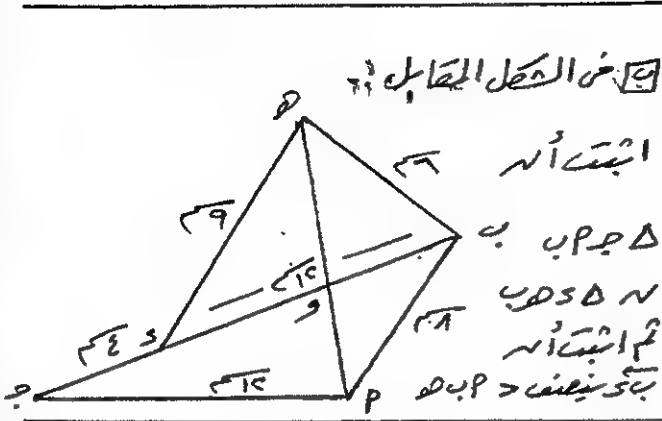
$$\text{من } \& \& \text{ يتبع أن: } \frac{PS}{SH} = \frac{PH}{HS} \Rightarrow \frac{PS}{SH} = \frac{PH}{HS}$$

#  $SP \parallel AB$  ::

ونضع أنه  $m(\angle P) = m(\angle B)$  وهما من وضع متبادل

#  $BP \parallel AC$  ::

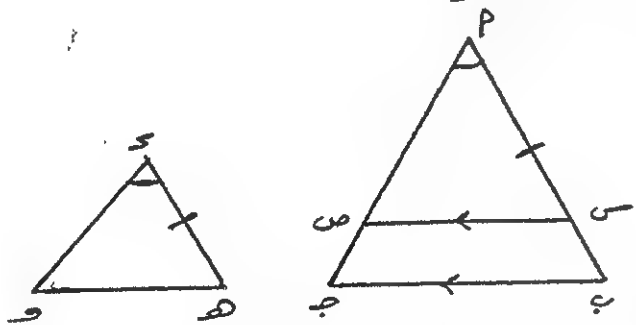
،  $m(\angle P) = m(\angle C)$  وهما من وضع متبادل



### نظرية (٢) :-

إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر وتنا سبت أطوال الأضلاع

التي تحتوي صائها الزاويتان كان المثلثان متشابهين.



العطيات :-  $\angle S = \angle P$  ،  $\frac{SP}{SH} = \frac{PH}{HS}$

المطلوب :-  $\Delta PAB \sim \Delta PBC$  و  $\Delta PBC \sim \Delta PCA$

الحل :- خذ  $SP \parallel AB$  حيث  $SP = PS$

ورسم  $SP \parallel AB$  وقطع  $AP$  من  $P$

البرهان :-  $\Delta PAB \sim \Delta PBC$  ::  $\Delta PAB \sim \Delta PBC$  (١)

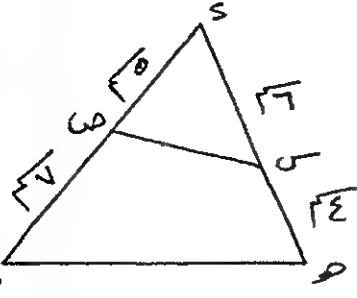
ويكون  $\frac{SP}{PS} = \frac{PH}{HS}$  ،  $\frac{SP}{SH} = \frac{PH}{HS}$  (مطلوب) ،  $\Delta PAB \sim \Delta PBC$

$\Delta PAB \sim \Delta PBC$  ويكون  $\frac{SP}{SH} = \frac{PH}{HS}$  ::

$\Delta PAB \sim \Delta PBC$  و  $\Delta PBC \sim \Delta PCA$  "ضلعان وزاوية محصورة"

$\Delta PAB \sim \Delta PBC$  و  $\Delta PBC \sim \Delta PCA$  (٢)

منه (١) ، (٢) يتبع أنه  $\Delta PAB \sim \Delta PBC \sim \Delta PCA$  و  $\Delta PAB \sim \Delta PBC$



مثال ③ :- من الشكل المقابل :- وهو مثلث فيه

$$SA = 10, AB = 12, SB = 14$$

$$SA = 10, AB = 12, SB = 14$$

(1) طول س هـ ، (2) أثبت أنه مثلث من هـ ومن رابعي واثنى .

$$\text{الحل :- } SA = 10, AB = 12, SB = 14$$

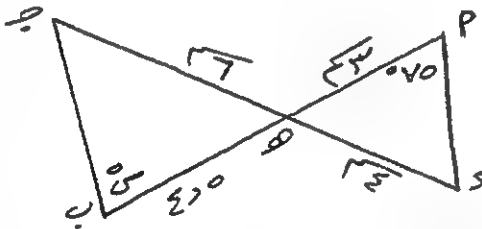
$$\text{من } \triangle SAH \text{ و } \triangle HBA \text{ :- } \frac{SA}{HB} = \frac{SH}{BA} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$\therefore \frac{SA}{HB} = \frac{SH}{BA} \text{ و } \therefore \text{ مشتركة } \therefore \triangle SAH \sim \triangle HBA$$

$$\therefore \frac{SA}{HB} = \frac{SH}{BA} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

ونستنتج أيضًا من التشابه أنه  $\angle HSA = \angle HBA$  (زاوية)

$\therefore$  زاوية خارجية للمثلث الرباعي من هـ ومن  $\therefore$  الشكل من هـ ومن رابعي واثنى



مثال ④ :- من الشكل المقابل :-

أوجد قيمة الرمز المستخدم من إحصائيات مفسر إجابته

الحل :-

لإيجاد الرمز من يجب إثبات أنه  $PA \parallel QB$  وذلك من تشابه المثلثين  $\triangle PAB$  و  $\triangle QAC$

$$\text{من } \triangle PAB \text{ و } \triangle QAC \text{ :- } \frac{PA}{QA} = \frac{AB}{AC} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$\therefore \frac{PA}{QA} = \frac{AB}{AC} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$\therefore \triangle PAB \sim \triangle QAC$  و  $\therefore$  نستنتج من التشابه أنه :-

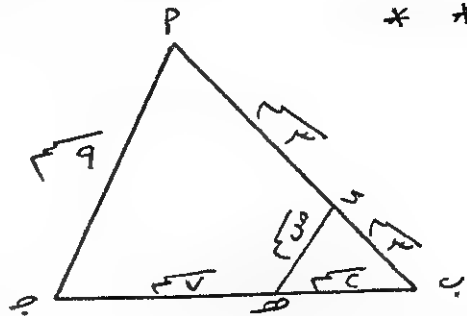
$$\angle PAB = \angle QAC \text{ و } \angle PBA = \angle QCA$$

مكتبة

شرفين - شارع حسني مبارك - خلف الثانوية بنات

01004423597.3943035

الصف الأول الثانوي



پروپان سولفونیک اسید

د. ج. مشركة (1)

$$(c) \frac{dp}{p} = \frac{dp}{p} \Leftrightarrow p \times dp = dp \times p \Leftrightarrow p \times dp = (dp) \therefore$$

# P Q Δ N S P Δ ن ی و ا ۶ ۱

$$\psi_S \chi \psi = \psi_S \chi \psi(c)$$

أثبت أنه (1)  $\Delta P \leq N \Delta S$

الطرح :-  $\therefore \Delta PAB \sim \Delta NCD$  و

$$\textcircled{1} \leftarrow \frac{dp}{ds} = \frac{p_c}{p_h} = \frac{p_p}{p_s} \quad \therefore (dp)_p = (dp)_s \therefore$$

∴ س منقشہ ہے ۶ اس منقشہ ہو

②  $\leftarrow \frac{00}{00} = \frac{00}{00} \therefore$

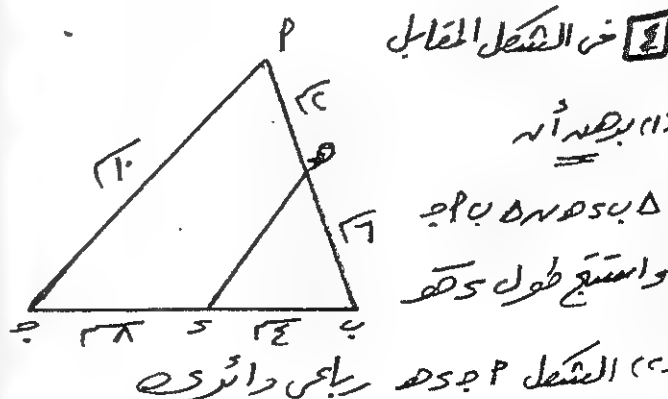
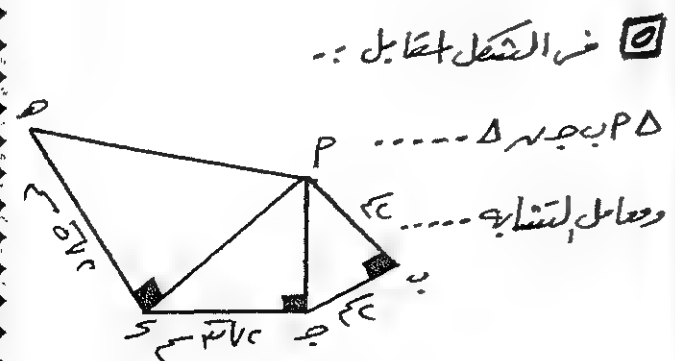
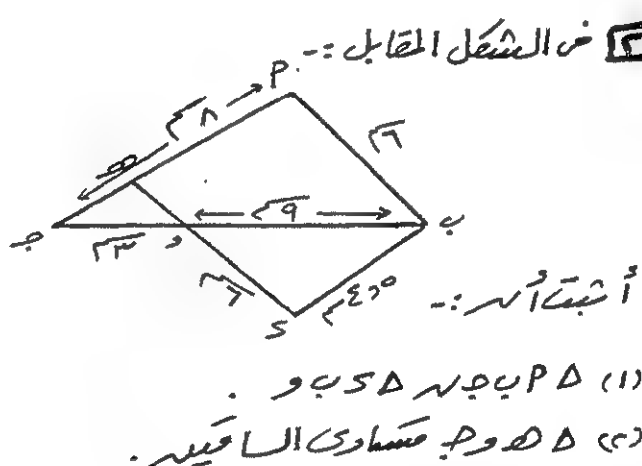
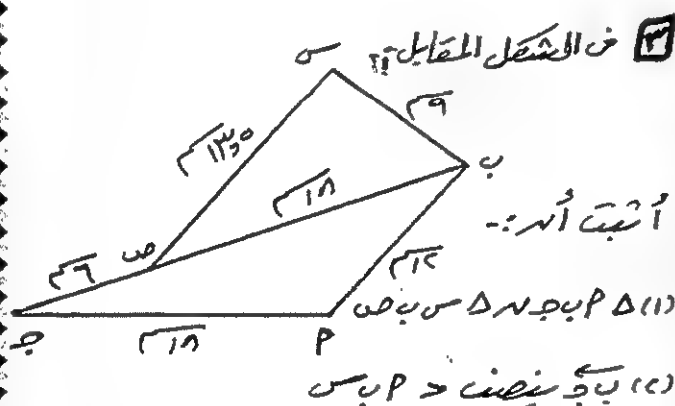
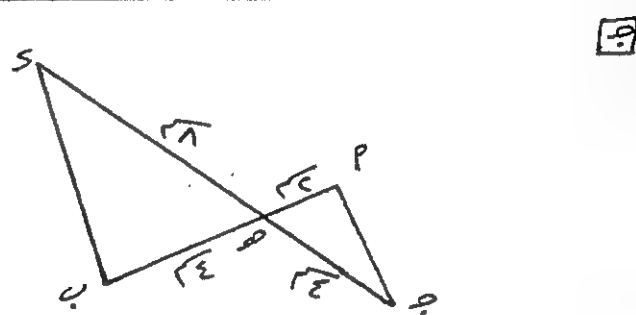
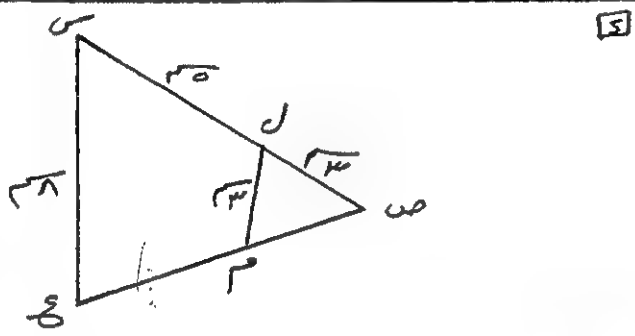
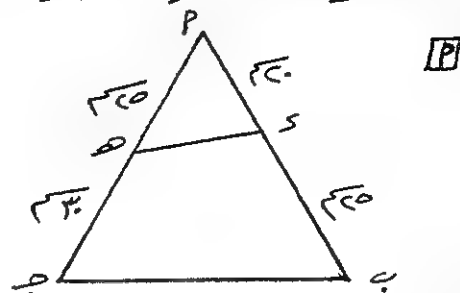
ض. Δ Δ P ب س 6 س ه من فينوا: > ب ≡ د ه 6  $\frac{P}{S} = \frac{P}{S}$  (برهاناً ص 166)

∴  $\Delta P \sim \Delta S$  و ينتج من التشابه أن  $\left(\frac{P}{S}\right) = \left(\frac{P}{S}\right) = \left(\frac{P}{S}\right)$

#  $\boxed{\psi_S \times \psi_P = \psi_S \times \psi_P} \Leftarrow \frac{\psi_P}{\psi_S} = \frac{\psi_P}{\psi_S} \Leftarrow \psi \in \mathbb{C} \text{ No}$



❶ اذكر رأي الحالات يكونه فيط المثلثاته قشايه وفي حالة التشابه اذكر سبب التشابه



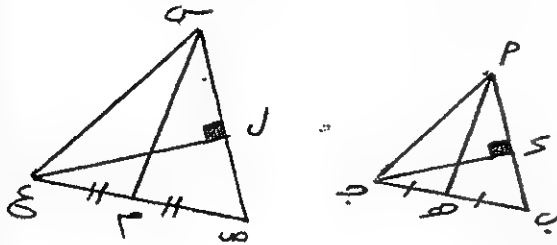
٦)  $P$  بج  $S$  شكل راسي مرسوم داخل دائرة تقاطع قطره  $PQ$  بـ  $S$  فـ  $PS$  فـ  $PS$

فإذا كان  $\frac{PS}{SP} = \frac{PS}{SP}$  أثبت أنه (١)  $PS \parallel PQ$  (٢)  $PS \perp PQ$  (٣)  $PS \perp PQ$

٧) من الشكل المقابل:  $P$  بج  $S$  فـ  $PS$  فـ  $PS$

هـ منتصف  $PQ$  ، م منتصف  $PS$  ،

جـ  $PS \perp PQ$  ،  $PS \perp PQ$  أثبت أنه



(١)  $PS \parallel PQ$  ، (٢)  $\frac{PS}{SP} = \frac{PS}{SP}$  ، (٣)  $PS \perp PQ$

٨)  $P$  بج  $S$  فـ  $PS$  فـ  $PS$  حيث  $P$  بج  $S$  ،  $PS \parallel PQ$  ،  $PS \perp PQ$

هـ  $PS$  منتصف  $PQ$  ،  $PS$  على الترتيب . رسم  $PS \perp PQ$  ،  $PS \perp PQ$

أثبت أنه  $\Delta PSQ \cong \Delta PSQ$  .

٩)  $P$  بج  $S$  فـ  $PS$  فـ  $PS$  حيث  $(PS)$   $PS \perp PQ$  ،  $PS \perp PQ$  ،  $PS \perp PQ$

أثبت أنه: (١)  $PS \parallel PQ$  ، (٢)  $PS \perp PQ$

(٣)  $PS \perp PQ$  ،  $PS \perp PQ$

(٤)  $PS \perp PQ$

درس " العلاقة بين مساحة سطح مثلثين متشابهين "

أولاً: النسبة بين مساحة سطح مثلثين متشابهين :-

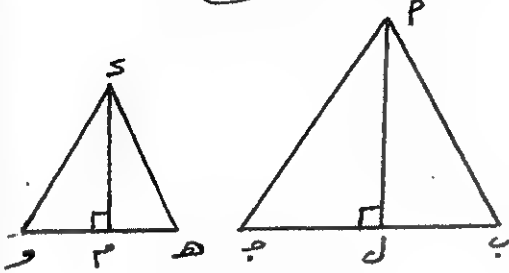
نظرية (٣) :-

النسبة بين مساحة سطح مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة

بين طولى أى ضلعين متناظرين فيها .

من الشكل المقابل :- إذا كان  $\triangle PAB \sim \triangle SDH$  و

$$\text{فإن } \left(\frac{PA}{SD}\right)^2 = \left(\frac{PB}{DH}\right)^2 = \left(\frac{AB}{SH}\right)^2 = \frac{(\triangle PAB)}{(\triangle SDH)}$$



ملاحظة هامة

① النسبة بين مساحة سطح مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين ارتفاعي متناظرين فيها

$$\text{من الشكل السابق :- } \left(\frac{PA}{SD}\right)^2 = \frac{(\triangle PAB)}{(\triangle SDH)}$$

② النسبة بين محيطي مثلثين (متشابهين) متساوي النسبة بين طولى ضلعين

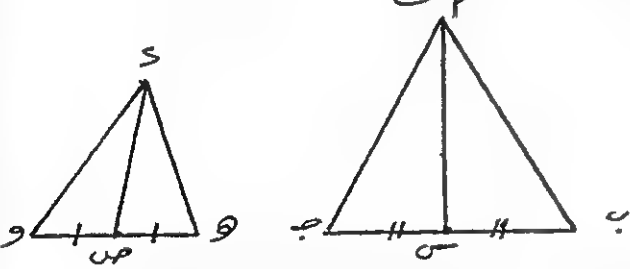
$$\text{متناظرين فيها . من الشكل السابق :- } \frac{\text{محيط } \triangle PAB}{\text{محيط } \triangle SDH} = \frac{PA}{SD} = \frac{PB}{DH} = \frac{AB}{SH}$$

③ النسبة بين مساحة سطح مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولى

أى متوسطين متناظرين فيها .

من الشكل المقابل :-  $\triangle PAB \sim \triangle SDH$  و

$$\therefore \left(\frac{PA}{SD}\right)^2 = \frac{(\triangle PAB)}{(\triangle SDH)}$$

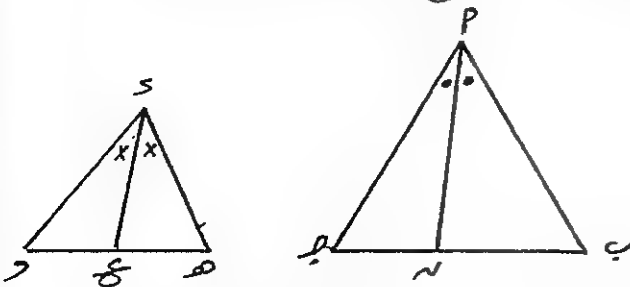


④ النسبة بين مساحة سطح مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولى

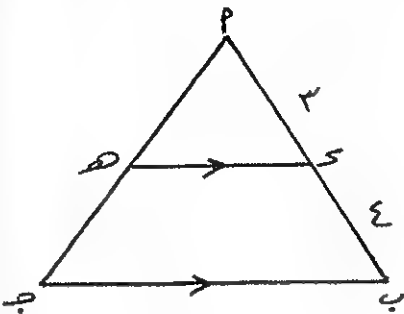
أى منصفين لزاويتي متناظرين فيها

من الشكل المقابل :-  $\triangle PAB \sim \triangle SDH$  و

$$\therefore \left(\frac{PA}{SD}\right)^2 = \frac{(\triangle PAB)}{(\triangle SDH)}$$



القاعدة تساوي النسبة بين ارتفاعيها .  
 ⑤ النسبة بين مساحتي مثلثين لهما نفس الارتفاع تساوي النسبة بين طولي قاعدتيهما .



مثال ① :- في الشكل المقابل :- P ب ج مثلث و D ع ب ج

حيث  $\frac{PD}{PB} = \frac{3}{6}$  و D ع ب ج و يقطع P ج في هـ

إذا كانت مساحة P د هـ = ٧٨٤ سم<sup>٢</sup> أوجد :-

(١) مساحة P د هـ (٢) مساحة شبه المثلث D ب ج هـ

الحل :-  $\because$  D ع ب ج  $\therefore \triangle P د هـ \sim \triangle P ب ج$

$$\frac{9}{81} = \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{(\text{مساحة } P د هـ)}{784} \Leftrightarrow \left(\frac{PD}{PB}\right)^2 = \frac{(\text{مساحة } P د هـ)}{(\text{مساحة } P ب ج)}$$

$$\Leftrightarrow (\text{مساحة } P د هـ) = \frac{9 \times 784}{81} = 89 \text{ سم}^2 \#$$

$$\therefore \text{مساحة شبه المثلث D ب ج هـ} = (\text{مساحة } P ب ج) - (\text{مساحة } P د هـ)$$

$$\therefore \text{مساحة شبه المثلث D ب ج هـ} = 784 - 89 = 695 \text{ سم}^2 \#$$

\* تدريب \* P ب ج مثلث مساحته ٦٠ سم<sup>٢</sup> ، رسم س هـ // ب ج و يقطع P ب في س  
 \* \* \* و يقطع P ج في هـ فإذا كان P س : س ب = ٣ : ٢ أوجد مساحتي المثلث س ب ج هـ

مثال ⑤ :- إذا كانت النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين هي ٩ : ٤ فإذا كان

محيط المثلث الأكبر ٩٠ سم أوجد محيط المثلث الأصغر

الحل :- لفرصه  $\triangle P د هـ \sim \triangle P ب ج$

$$\therefore \frac{9}{4} = \left(\frac{PD}{PB}\right)^2 = \frac{(\text{محيط } P د هـ)}{(\text{محيط } P ب ج)} \Leftrightarrow \frac{9}{4} = \frac{PD}{PB}$$

$$\therefore \frac{9}{4} = \frac{\text{محيط } P د هـ}{\text{محيط } P ب ج} \Leftrightarrow \frac{9}{4} = \frac{PD}{PB} = \frac{\text{محيط } P د هـ}{90}$$

$$\therefore \text{محيط } P د هـ = \frac{9 \times 90}{4} = 202.5 \text{ سم} \#$$

## الفصل الدراسي الأول

بہر طوری قطعاً یہ متناظر ہے۔



$${}^c_3(\frac{p}{h}) = {}^c_3(\frac{p}{s}) = \frac{3}{3}(\frac{p}{h}) = \frac{3}{3}(\frac{p}{s}) = 1$$

خود اکانہ مجموع مصاحفیرا۔ سم آرد مسامحہ کل منوطا۔

الحل :-

بفرصة مسابقة الأول = ٢٥ سم ومسابقة الثاني = ٩ سم

∴ مساحة المضلع الأول =  $0 \times 1 = 0$  ، مساحة المضلع الثاني =  $0 \times 9 = 0$  سم<sup>2</sup> #

\* \* \* \* \*  
\* \* \* \* \*  
\* \* \* \* \*  
\* \* \* \* \*  
\* \* \* \* \*

ج 5 = 17. اُصحب (1) و (5) ، (c) طول عجل

(۳) م (المضلع أب ج د) : م (المضلع س ص ع د)

الحل :-  $\therefore$  المصلي  $P$  يوجد في المصلي  $N$  المصلي  $S$  هو  $\hat{S} \therefore \hat{P} = (\hat{S})^c = \hat{S}^c$  #

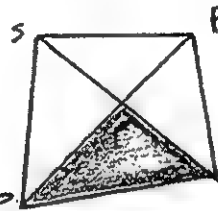
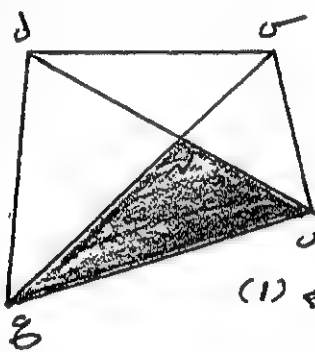
∴ س ص =  $\frac{3}{4} P$  ∴  $\frac{3}{4} = \frac{CP}{S ص}$  "عده خواص القياس"

عده تشابه المضلعين نجد أن ∴  $\frac{5}{8} = \frac{CP}{S ص} \Leftarrow \frac{5}{8} = \frac{3}{4}$

∴  $8 \times 3 = \frac{17 \times 8}{2} = 68$  #

∴ م (المضلع P ب ج د) : م (المضلع س ص ح ل) = (P ب) : (س ص) = 9 : 17 #

مثال ٥ ∴ P ب ج د ، س ص ح ل مضلعان متشابهان ∴ تقاطع قطري الأول من م وتقاطع قطري الثاني من ن اشبه أن : م (المضلع P ب ج د) : م (المضلع س ص ح ل) = (م ج) : (ن ح) ∴ (ع ن)



الحل ∴ ∴ المضلع P ب ج د ∼ المضلع س ص ح ل

∴ ∴ P ب ج د ∼ س ص ح ل

∴ ∴ س ب ج د ∼ ن ح ل ص ح

∴ ∴ م ب ج د ∼ ن ح ل ص ح ونج أن :  $\frac{م ج}{ن ح} = \frac{م ج}{ن ح} \Leftarrow (1)$

∴ المضلع P ب ج د ∼ المضلع س ص ح ل

∴ ∴  $\frac{م (المضلع P ب ج د)}{م (المضلع س ص ح ل)} = \frac{م ب ج}{ن ح ل} \Leftarrow (2)$

عده (1) و (2) ∴ م (المضلع P ب ج د) : م (المضلع س ص ح ل) = (م ج) : (ن ح) ∴ (ع ن)

مثال ٧ ∴ P ب ج ح حلت قائم الزاوية من ب فإذا كان P ب ج ج د ، P ج د أ ضلع

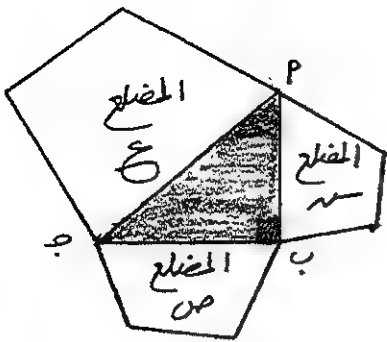
مناظرة لثلاث مضلعات متشابهة منشأة على أضلاع المثلث P ب ج

وهي على الترتيب : المضلع س ، المضلع ص ، المضلع ع .

اشبه أن م (المضلع س) + م (المضلع ص) = مساحة (المضلع ع)

الحل ∴ ∴ المضلع س ∼ المضلع ص ∼ المضلع ع ∴  $\frac{م (المضلع س)}{م (المضلع ع)} = \frac{م (ب ج)}{م (ج د)} \Leftarrow (1)$

∴ المضلع ص ∼ المضلع ع ∴  $\frac{م (المضلع ص)}{م (المضلع ع)} = \frac{م (ج د)}{م (د ح)} \Leftarrow (2)$



مجموع (1) و (2)

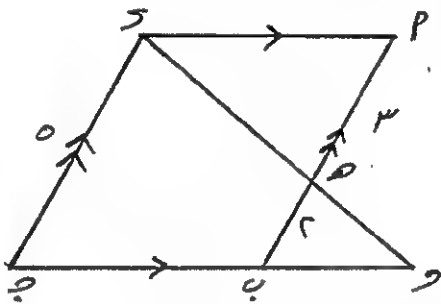
$$\frac{\binom{ب}{ج}}{\binom{ب}{ج}} + \frac{\binom{ب}{د}}{\binom{ب}{د}} = \frac{\binom{ب}{ج} + \binom{ب}{د}}{\binom{ب}{ج} + \binom{ب}{د}} = \frac{\binom{ب}{ج} + \binom{ب}{د}}{\binom{ب}{ج} + \binom{ب}{د}} \leftarrow$$

$$(1) \leftarrow \frac{\binom{ب}{ج} + \binom{ب}{د}}{\binom{ب}{ج} + \binom{ب}{د}} = \frac{\binom{ب}{ج} + \binom{ب}{د}}{\binom{ب}{ج} + \binom{ب}{د}} \therefore$$

$$\therefore \binom{ب}{د} = \binom{ب}{ج} + \binom{ب}{د} \leftarrow (2)$$

$$1 = \frac{\binom{ب}{ج}}{\binom{ب}{ج}} = \frac{\binom{ب}{ج} + \binom{ب}{د}}{\binom{ب}{ج} + \binom{ب}{د}} \leftarrow (1) \text{ و } (2)$$

$$\therefore \binom{ب}{د} = \binom{ب}{ج} + \binom{ب}{د} \quad \# \quad \binom{ب}{د} = \binom{ب}{ج} + \binom{ب}{د}$$



مثال ① :- في الشكل المقابل :-  $پ ب ج د$  متوازي أضلاع

$$هـ و پ ج حيث  $\frac{هـ}{ج} = \frac{پ}{ب} \text{ و } \frac{هـ}{ب} = \frac{پ}{ج} \text{ و } \frac{هـ}{د} = \frac{پ}{س}$$$

$$(1) \text{ أثبت أنه } س د هـ و س د ج و س د هـ د$$

$$(2) \text{ أو } \frac{\binom{س}{د}}{\binom{س}{د}} = \frac{\binom{س}{د}}{\binom{س}{د}}$$

الحل :-

"معدن المتوازي"

$$\binom{س}{د} = \binom{س}{د} = \binom{س}{د}$$

"بالتبادل"

$$\therefore \binom{س}{د} = \binom{س}{د} = \binom{س}{د} \quad \# \quad \binom{س}{د} = \binom{س}{د} = \binom{س}{د}$$

$$\therefore \binom{س}{د} = \binom{س}{د} = \binom{س}{د} \quad \# \quad \binom{س}{د} = \binom{س}{د} = \binom{س}{د}$$

$$\therefore \frac{\binom{س}{د}}{\binom{س}{د}} = \frac{\binom{س}{د}}{\binom{س}{د}} = \frac{\binom{س}{د}}{\binom{س}{د}} = \frac{\binom{س}{د}}{\binom{س}{د}}$$



تأديده على العلاقة بين مساحة مضلعين متشابهين

□ أكل ما يأتي :-

(١) إذا كانت النسبة بين طولي ضلعين متناظرين من مضلعين متشابهين ٧ : ١١ فإنه النسبة بين مساحتهما ..... ، وبين محيطيهما .....

(٢) إذا كان  $P \Delta$  ب ج د  $5 \Delta$  ص ع وكان  $P = 3$  ص فإن  $\frac{م(5 \Delta ص ع)}{م(P \Delta ب ج)} = \dots\dots\dots$

(٣) مضلعان متشابهان النسبة بين مساحتهما ٩ : ٤ فإنه النسبة بين محيطيهما .....

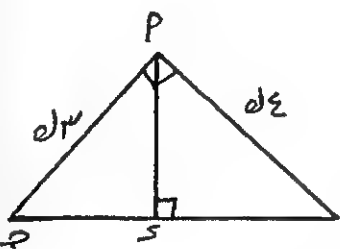
(٤) إذا كان  $P \Delta$  ب ج د  $5 \Delta$  هـ و ،  $م(P \Delta ب ج) = 9$  م  $(5 \Delta هـ و)$  وكان  $5 هـ = ٤ م$  فإنه  $P = \dots\dots\dots$  م .

(٥) مربعان النسبة بين طول قطريهما ٢ : ٥ فإذا كانت مساحة أصغرهما ٤ م فإنه مساحة الأكبر ..... م

□ إذا كان طول ضلعين متناظرين من مضلعين متشابهين ١٦ م ، ١٦ م وكانت مساحة المضلع الأصغر = ١٣٥ م أردت مساحة المضلع الأكبر .

□  $P$  ب ج ق ،  $S$  ب ج ق حيث  $P = ١٣$  م ،  $S$  ب ج ق حيث  $S = ١١$  م ، وإذا كانت  $م(P \Delta) = ٦٠$  أردت مساحة شبه المثلث  $S$  ب ج هـ .

□ ادرس كلامه الاشكال الآتية ، حيث له ثابت تناسب ، ثم أكل :-

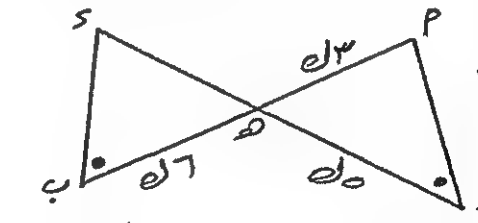


□  $م(P \Delta ب ج) = ٩٠$

$PS \perp AB$

$م(P \Delta س ج) = ١٨٠$  م

فإنه  $م(P \Delta ب ج) = \dots\dots\dots$  م



□  $م(P \Delta ب ج) = ٩٠٠$  م

فإنه  $م(S \Delta ب ج) = \dots\dots\dots$  م

□  $P$  ب ج ق قائم الزاوية عند ب ، سميت المثلثات المتساوية الاضلاع  $P$  ب س ،  $S$  ب ج هـ  $P$  هـ . أثبت أنه  $م(P \Delta ب س) + م(S \Delta ب ج) = م(P \Delta ب هـ)$

٦)  $P$  ب ج مثلث فيه  $\frac{BP}{PQ} = \frac{2}{3}$  ، رسمت الدائرة المارة ب  $Q$  ومسه عند نقطة  $R$  رسم

المماس لهذه الدائرة تقطع  $PQ$  في  $R$  . اثبت أنه  $\frac{VR}{16} = \frac{m(PQR)}{m(PQR)}$  .

٧)  $P$  ب ج د متوازي أضلاع ،  $Q$  على  $BP$  ،  $R$  على  $PC$  حيث  $BR = PC$  ،

،  $Q$  على  $BP$  ،  $R$  على  $PC$  حيث  $BR = PC$  ، رسم متوازي الأضلاع  $BS$  على  $Q$  ،  
اثبت أنه  $\frac{1}{2} = \frac{m(\text{المتوازي } PQR)}{m(\text{المتوازي } BS)}$  .

٨)  $P$  ب ج د ،  $S$  على  $CD$  ومضلعاه متساوية ، فإذا كانت  $m$  فنصف  $BP$  .

،  $m$  فنصف  $SD$  . اثبت أنه  $m(\text{المضلع } PQR) : m(\text{المضلع } SCD) = (mS) : (mD)$  .

٩)  $P$  ب ج مثلث قائم الزاوية ضرب ،  $Q$  على  $BP$  ،  $R$  على  $PC$  ، رسم على  $BP$  .

،  $Q$  على  $BP$  ،  $R$  على  $PC$  ،  $Q$  خارج المثلث  $PQR$  .

(١) اثبت أنه : المضلع  $S$  على  $CD$  ،  $m$  المضلع  $S$  على  $CD$  ،  $m$  المضلع  $S$  على  $CD$  .

(٢) إذا كان  $BP = 6$  ،  $PD = 10$  . أوجد النسبة بين مساحة سطح المضلعين

١٠)  $P$  ب ج مثلث فيه  $Q$  على  $BP$  ،  $R$  على  $PC$  ، أضلاع متساوية لثلاثة مضلعا

متساوية مرسومة خارج المثلث ، وهي المضلعات  $S$  ،  $Q$  ،  $R$  على الترتيب

فإذا كانت مساحة المضلع  $S = 10$  ،  $Q = 15$  ، ومساحة المضلع  $Q = 10$  ،

ومساحة المضلع  $R = 10$  . اثبت أنه المثلث  $PQR$  قائم الزاوية .

١١)  $P$  ب ج د مربع قسمت  $BP$  ،  $Q$  على  $BP$  ،  $R$  على  $PC$  ،  $S$  على  $CD$  ،  $Q$  على

بنسبة ١ : ٣ اثبت أنه .

(١) الشكل  $S$  على  $CD$  مربع .

(٢)  $\frac{Q}{R} = \frac{m(\text{المربع } SCD)}{m(\text{المربع } PQR)}$  .

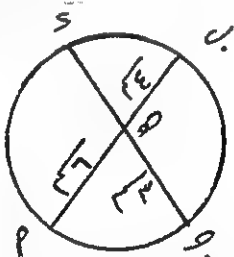
تقریر مشہور :-

المعطيات :- آب، جدي وترابه متقاطعا في فوه

العمل :- نرسم  $SP$  ،  $C$  ،  $B$  .

$\frac{SP}{CP} = \frac{SD}{CD} = \frac{DP}{PD} \therefore \Delta SPD \sim \Delta PDC$  وبتبعاً

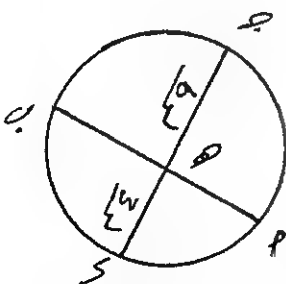
شركة شارع حصى مبارك - خلف الثانوية بكت  
مكة ٠١٠٠٠٤٢٣٥٩٧ - ٣٩٤٣٠٣٥



$P = 6\text{ cm}$ ,  $E = 6\text{ cm}$ ,  $F = 3\text{ cm}$  اور جدول سے

الملاحظة  $\therefore \therefore \bar{P} \cap Q = \bar{P} \cap \bar{P} \cap Q$

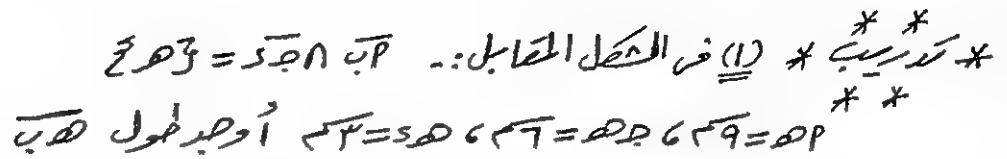
$$\# \Gamma = S \circ \overset{(P)}{\Gamma} = C \circ \Gamma = \Gamma \circ C = S \circ X \circ P = C \circ X \circ P \therefore$$



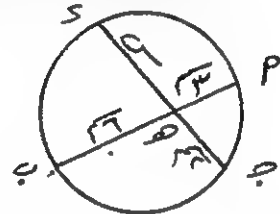
مثال ٥ :- من الشكل المقابل :-  $P \cap \overline{Q} = \overline{P} \cap Q$  صح

$\sqrt{2} = 1.41$ ,  $\sqrt{9} = 3$ .  $\frac{x}{3} = \frac{P}{6}$  إذا كان  
أوجد طول  $\overline{OP}$ .

## الابداع في الرياضيات

$$S \cap X \cap P = C \cap X \cap P \therefore E \cap S = \overline{S \cap P} \cap \overline{C \cap P} \therefore$$
$$\overline{7} = e \leq 7 = e^{(1)} \leq 7 = e^1 \Leftarrow 8 \times 9 = e^8 \times e^9 \therefore$$
$$\# \quad \nabla V r = e r = u \text{ and } \nabla V \Sigma = e \Sigma = p \text{ and } \therefore$$


(٥) أوجه قيمية من غير كل هذه الأشكال الآتية :-



مثال ۳۳ من الشكل المقابل :- إذا كان



الحل :- ∴ P نقطة خارج الدائرة ، نجب أن نجد  $\vec{OP}$

$$10 \times 10^9 = 9 \times 10^9 \Leftrightarrow 5 \times 10^9 = 0 \times 10^9 \therefore$$

$$\sqrt{r} = \frac{r}{15} = \text{OP} \leftarrow \text{OP IC} = r7$$



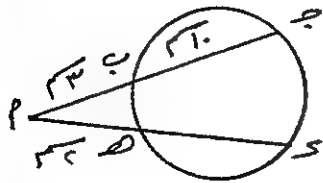
اُوجِدْ طُولَ بَعْدِ

الحل :-  $\therefore \vec{p} \perp \vec{q} \Rightarrow \vec{p} \cdot \vec{q} = 0$   $\Leftarrow$  ففرص أن  $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$

$$(0+0)5 = 10 \times 5 \neq 10 \times 5 = 50 \times 5 \therefore$$

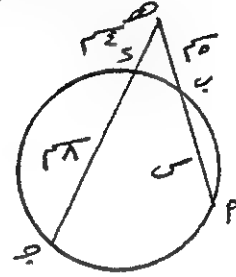
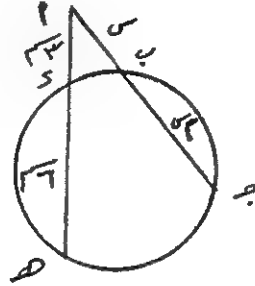
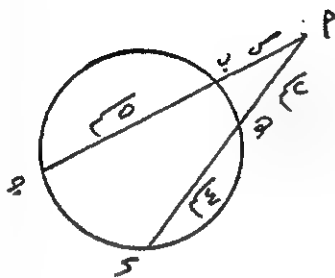
$$\cdot = (8-5)(9+5) \Leftarrow \cdot = 37 - 50 + 5 \Leftarrow 50 + 5 = 37$$

∴ س = ٩ (مفروضة) ، س = ٤ ∴ طول ب هـ = ٣٦



\* \* \* تدريسي \* (١) من الشكل المقابل :-  
\* \* \* أوجد طول هـ

(٢) أوجد قيمة س من كل من الاشكال الآتية :-



نتيجة (١) :-

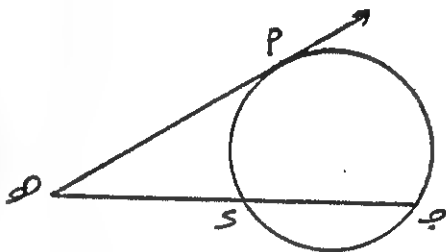
إذا رسم من نقطة خارج دائرة حاطع ومماس فأنه حاصل ضرب طول القاطع

في طول جذره الخارج يساوي مربع طول المماس.

من الشكل المقابل :- P مماس للدائرة ،

هـ جـ يقطع الدائرة من س ، جـ

$$\left( P هـ \right) = هـ س \times هـ جـ$$

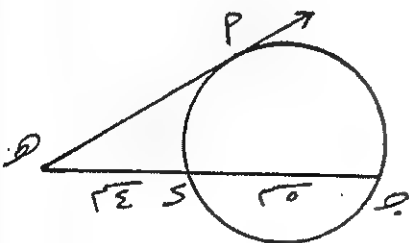


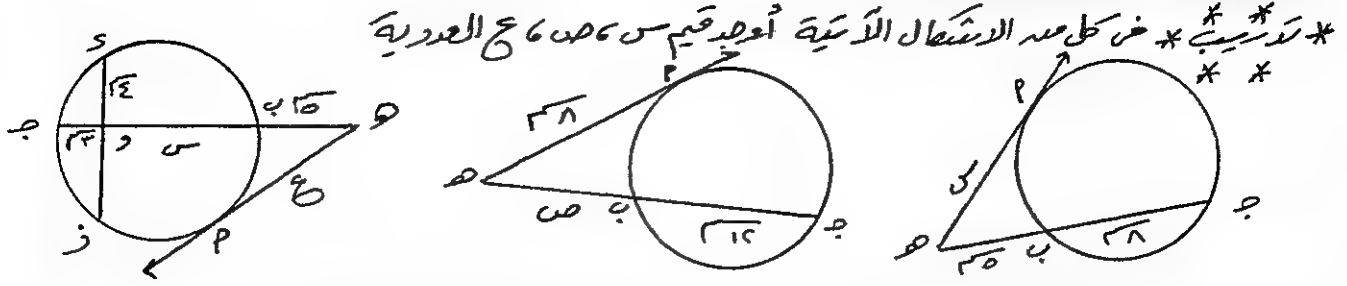
مثال © :- من الشكل المقابل :- هـ مماس للدائرة عند جـ

هـ س = ٣٦ ، جـ س = ٩ أوجد طول هـ

الحل :- هـ مماس للدائرة

$$\therefore (P هـ) = هـ س \times هـ جـ = ٩ \times ٣٦ = ٣٢٤ \leftarrow هـ = ١٨$$





عكس قمر بن مشهور :-

إذا تقاطع المستقيمان الخارجيان للقطعتين  $AP$ ،  $BP$  في نقطة  $هـ$  (مختلفة عن كل من  $P$ ،  $ب$ ،  $ج$ ،  $س$ ) وكان  $هـ P \times هـ ب = هـ ج \times هـ س$  فإنه النقطة  $هـ$  تقع على دائرة واحدة



من الشكل المقابل :-  
إذا كان  $هـ P \times هـ ب = هـ ج \times هـ س$   
فإنه الشكل  $P$  ب ج س زاوي دائري

مثال ٦ :- من الشكل المقابل :-

اثبت أنه الشكل  $هـ ب ج س$  زاوي دائري

$$\underline{\text{الحل}} \quad \because \dots \because AP \times SP = BP \times SP \quad \therefore \angle P = 8 \times 3 = 24$$

$$\because \dots \because AP \times SP = BP \times SP \quad \therefore \angle P = 2 \times 6 = 12$$

$$\because \dots \because AP \times SP = BP \times SP \quad \therefore \angle P = 8 \times 3 = 24$$

$\therefore$  النقطة  $هـ$ ،  $ب$ ،  $ج$ ،  $س$  تقع على دائرة واحدة ويكون الشكل  $هـ ب ج س$  زاوي دائري

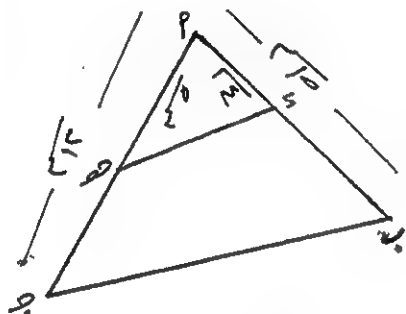
في "مخبره" :- يحل المثال السابع بإنتاج تشابه المثلثين  $هـ ب ج$ ،  $س ب ج$

# الابداع في الرياضيات

اثبت أنه الفصل P في ج باعني دائري.

$$P_7 = 1 \times 10 = 50 \text{ xdp} \therefore P_7 = 289 = 40 \text{ xdp} \therefore \therefore \underline{\underline{131}}$$
$$200 = \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PQ} \therefore 500 \times 0.5 = 0.500 \times 1000 \therefore$$

∴ الشكل P بي ج ياعى وانزى #

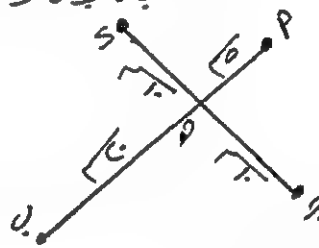
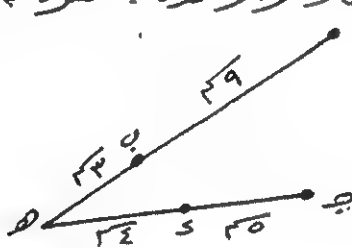
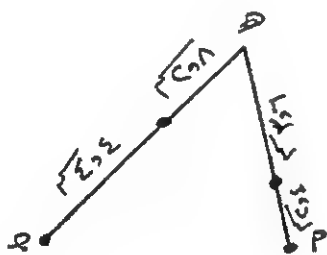


\* \* \* تَرْيِيبُ \* \* \* (١) فِي الْمَصَلِّ الْمُنَاجِلِ :-

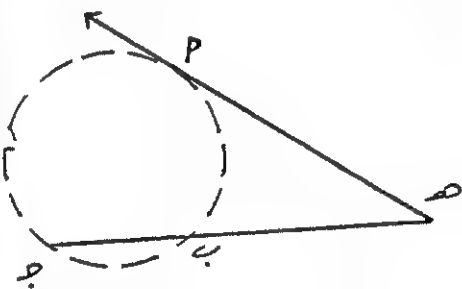
استنتج أنه الشكل الصحيح رباعي الزوايا

(٢) من أى عهد الاستقلال الآتية تقع النقطة

۲، ب، ج، د علی دائرہ واحدہ؟ فسر! جائزہ



”نَسِيحَةٌ (٢)“



$\text{P}(\text{A}) = \frac{1}{3}$

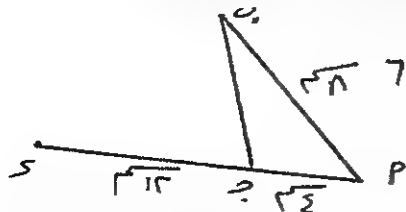
فيما هو محاسن الدائرة المارة بالنقطة P، ب، ج.

مثال ۱) ∴ P و مختلف فیہ P = A کم ، P = B کم ، S ⊆ P کم ، S ⊄ P کم

حيث  $ج = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$  أشبه أن  $\beta$  تحس الدائرة المارة بالنقطة  $ج$  ،  $ج = 5$

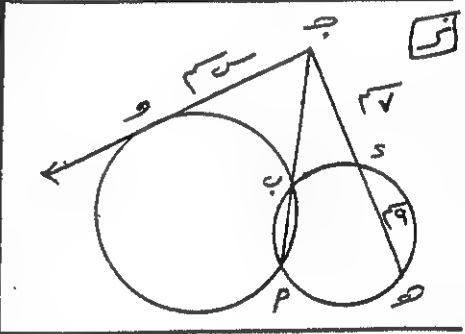
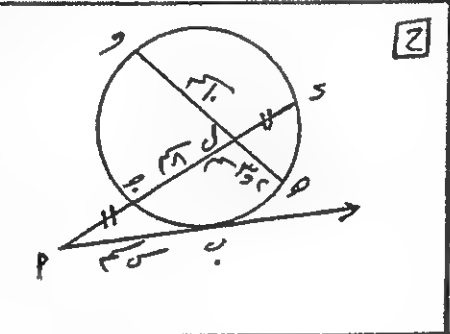
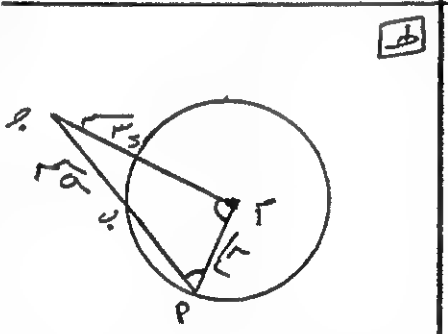
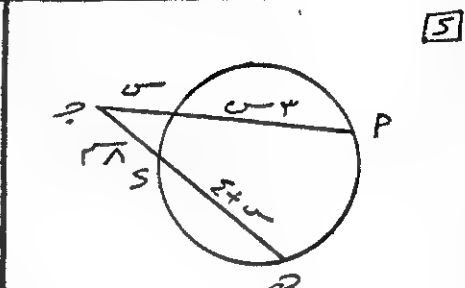
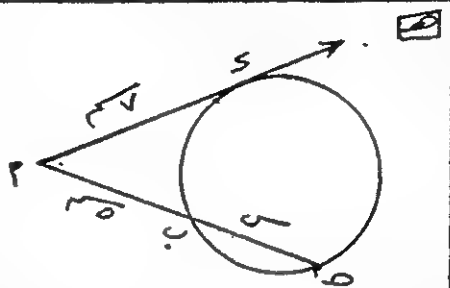
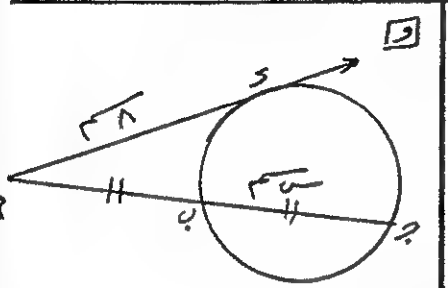
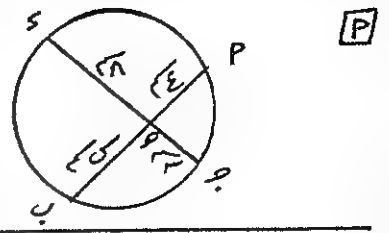
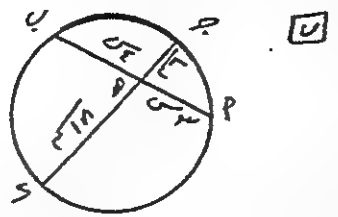
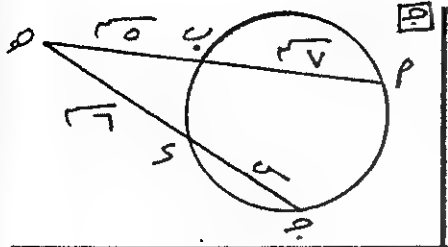
$$\sqrt{\lambda} \quad 72 = 17 \times 5 = 5 \times 17 \therefore 72 = \hat{\lambda} = (5 \times 17) \therefore \underline{\underline{85}}$$
$$\varepsilon P \chi \in P = (U.P) \therefore$$

∴ م ب تحس الرائزرة المارة بالنقط ب، م، م، م

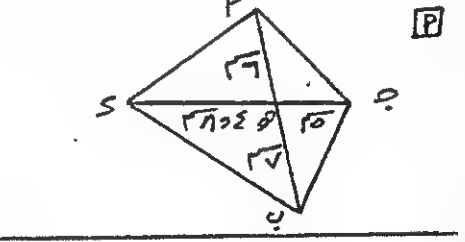
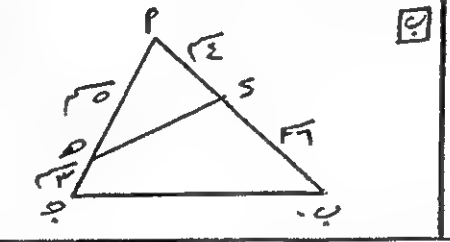
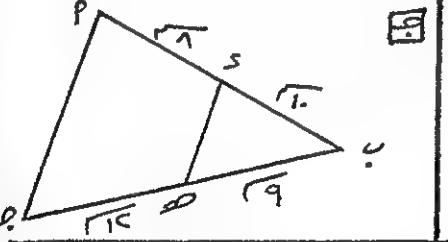


تمارين على "تطبيقات التشابه من الدائرة"

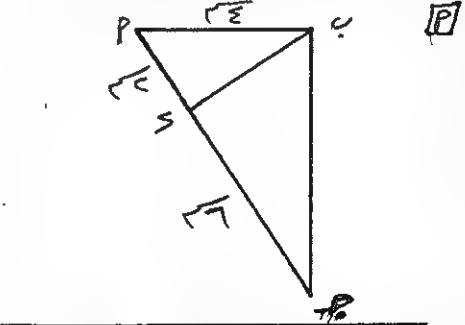
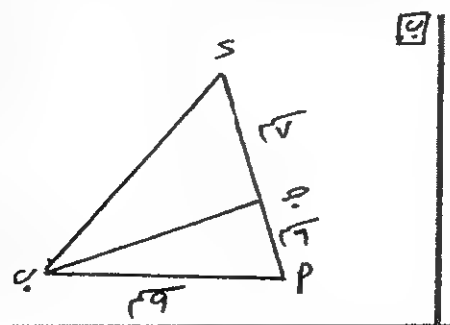
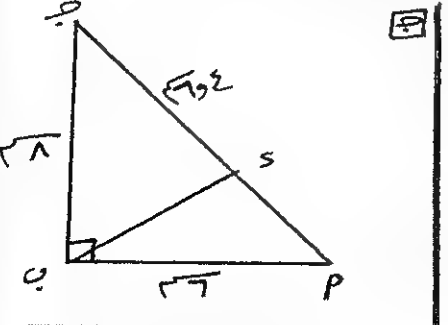
1 أوجد قيمة  $x$  من العديد من كل من الاشكال الآتية :-



2 من أي من الاشكال الآتية تقع النقطة  $P$ ،  $B$ ،  $C$ ،  $S$  على دائرة واحدة، فسر واجابك



3 من أي من الاشكال التالية  $P$  تقع على دائرة المارة بالنقطة  $B$ ،  $C$ ،  $S$





## الصف الأول الثانوي

(c) الشكل لصحة مع بعض دائرة

جـ هـ = سم أثبت أن النقط  $P, Q, R, S$  تقع على دائرة واحدة

عاصمیانہ للذاتۃ عندس، من . اُنْجَبَ اُنْہ : جس = جس

1) اَبَج حَلَل ، س وَبَو حَبِي سَب = 50 ، م = 55 ، 6 اِذَا كَبُرَ ج = 77

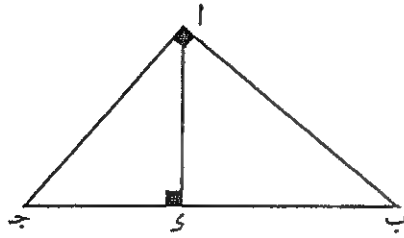
$$9:0 = (\text{sup } \Delta)^{\text{P}} : (\text{sup } \Delta)^{\text{P}} (\text{P}) \quad \text{P} \cdot \text{sup } \Delta \sim \text{sup } \Delta \quad (5)$$

الدائرة الكبرى ليقطع الدائرة الصغرى في ب، ج على الترتيب أجبته:  $AP \times PB = 90$

ضرب  $\bar{P}$  ضرب  $A \cap B = (A \cap B) \cap P = (A \cap B) \cap \bar{P} \cup (A \cap B) \cap P$  ثم أوجد طول  $\bar{P}$

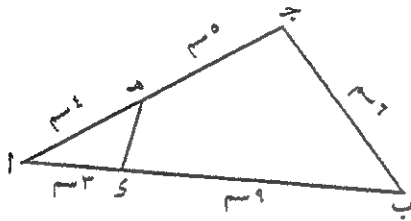
اثبت أنه  $جس = جوص$

## تمارين عامة



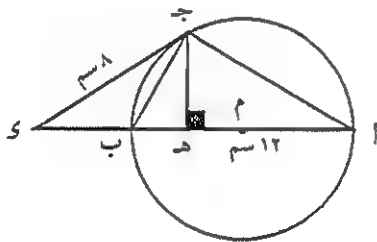
١٦ في الشكل المقابل: أى العبارات التالية غير صحيحة:

- أ)  $AD^2 = BD \times DC$
- ب)  $AB^2 = BD \times BC$
- ج)  $AD \times BC = AB \times DC$
- د)  $AB \times AD = AC \times DC$



١٧ في الشكل المقابل:  $AB \parallel DE$ ،  $AD = 3$ ،  $DB = 7$ ،  $AE = 4$ ،  $EC = 8$ .  
أثبت أن  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

ثم أوجد طول  $DE$



١٨ في الشكل المقابل:  $AB$  قطر في الدائرة م، طوله ١٢ سم

و  $AB \parallel AC$  حيث  $AC = 16$  سم، ج تقع على الدائرة

حيث  $CG = 8$  سم. جده  $\perp AB$ . أثبت أن:

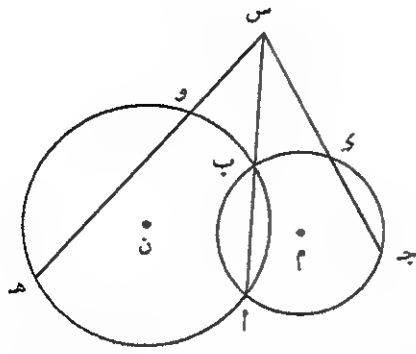
- أ) ج مماسة للدائرة م.
- ب)  $\triangle ACG \sim \triangle ABC$
- ج) جده  $= 8, 16$  سم

١٩ أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب،  $AB \perp AC$ ،  $AB = 15$  سم،  $AC = 9$  سم. رسم على  $AB$ ،  $B$  ج من

الخارج المربعان  $AB \perp AC$ ،  $AB = 15$  سم،  $AC = 9$  سم. رسم على  $AB$ ،  $B$  ج من

أثبت أن المضلع  $ACB \sim$  المضلع  $ABD$  و  $BD \perp AC$

ب) أوجد م (المضلع  $ACB$  و  $ABD$ ): م (المضلع  $ABD$  و  $ACB$ )



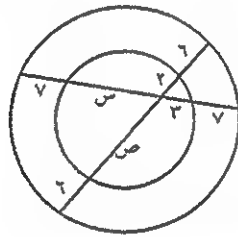
٥) في الشكل المقابل: الدائرتان م، ن متقاطعتان في ا، ب

$$\overline{AB} \cap \overline{ج د} = \overline{ه و} = \{س\} \text{ حيث}$$

$$س د = ٢ \text{ سم، ج ه} = ١٠ \text{ سم، و س} = ٦ \text{ سم}$$

٦) أثبت أن الشكل ج د و ه رباعي دائري.

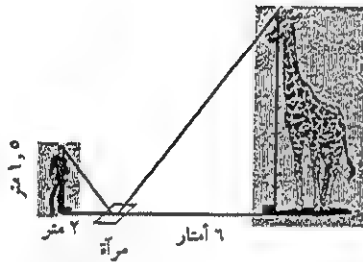
٧) أوجد طول ج د



٦) في الشكل المقابل: دائرتان متحدتا المركز،

والأطوال المبينة للقطع المستقيمة بالسنتيمترات.

أوجد قيم س، ص العددية.



٧) حديقة حيوان: في رحلة مدرسية إلى حديقة الحيوان أراد

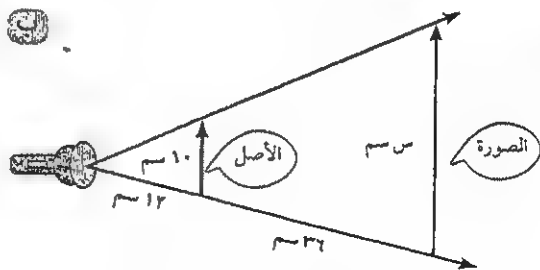
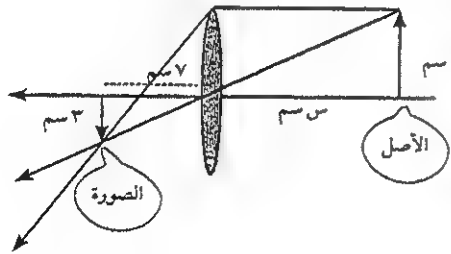
حسام أن يعرف ارتفاع حيوان الزرافة. وضع حسام مرآة

مستوية على الأرض تبعد عنه متران وعن الزرافة ٦ أمتار،

فإذا كان حسام والمرآة والزرافة على استقامة واحدة

وارتفاع حسام ١,٥ مترًا. كم يبلغ ارتفاع الزرافة.

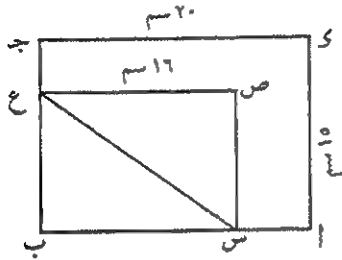
٨) البصير بالفيديو: احسب معامل مغير البعد، واحسب قيمة س العددية في كل شكل مما يلي.



## اختبار الوحدة

١) أكمل ما يأتي:

- ١) المضلعان المشابهان لثالث .....  
 ٢) إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة في مثلثين فإنهما .....  
 ٣) إذا كانت النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين ٣ : ٥ فإن النسبة بين مساحتهما .....  
 ٤) إذا تقاطع وتران  $\overline{AB}$ ،  $\overline{CD}$  لدائرة في نقطة  $S$  فإن:

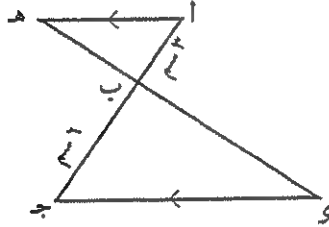


$$\text{.....} \times \text{.....} = \text{.....} \times \text{.....}$$

٥) إذا كان المستطيل  $AB$  جد  $\sim$  المستطيل  $SC$  ب  $E$  ص،

$$AE = 15 \text{ سم، } CD = 20 \text{ سم، } SC = 16 \text{ سم}$$

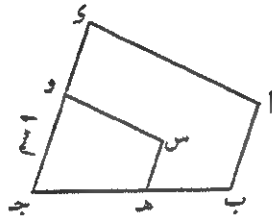
$$\text{فإن: } SC = \text{.....}$$



٦) في الشكل المقابل:  $\overline{AD} \parallel \overline{DE}$ ،  $\overline{AB} = \overline{DE} \cap \{B\}$ ،

$$AB = 3 \text{ سم، } B = 6 \text{ سم، } DE = 12 \text{ سم}$$

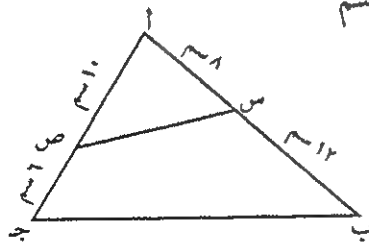
فأوجد طول  $\overline{DE}$



٧) في الشكل المقابل: المضلع  $AB$  جد  $\sim$  المضلع  $SC$  هـ جـ و

أثبت أن  $\overline{AB} \parallel \overline{SC}$

وإذا كانت  $SC = \frac{1}{4} AB$ ، جـ و = 9 سم فأوجد طول  $\overline{SC}$



٨)  $AB$  جد مثلث فيه  $S \in \overline{AB}$  بحيث كان  $AS = 8$  سم،  $SB = 12$  سم

ص  $\in \overline{AC}$ ، بحيث كان  $AS = 10$  سم،  $SC = 6$  سم.

أثبت أن:

١)  $\triangle ABC \sim \triangle S$

٢) الشكل  $SC$  ب جـ ص رباعي دائري.

٩)  $AB$ ،  $\overline{CD}$  وتران في دائرة متقاطعان، في هـ فإذا كان هـ منتصف  $\overline{AB}$ ، جـ هـ = 4 سم، هـ د = 9 سم  
 فأوجد طول  $\overline{AB}$ .

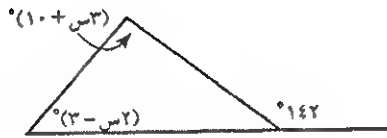
## اختبار تراكمي

أسئلة الاختيار من متعدد

١) إذا كان  $\frac{2}{3} = \frac{1+s}{1+s}$  فإن  $11 - s$  تساوي:   
 أ) ١٠ ب) ٥ ج) صفرًا د) ١٠٠

١٠

٥



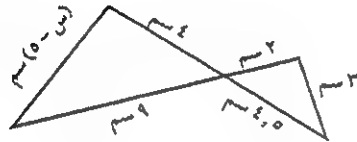
٢) مستعينًا بمعطيات الشكل، فإن  $s$  تساوي:

أ) ١٨

ب) ٣٢

ج) ٥١

د) ٢٧



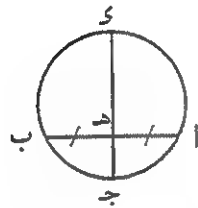
٣) مستعينًا بمعطيات الشكل، فإن  $s$  تساوي:

أ) ١١

ب) ٥

ج) ١٤

د) ١٢



٤) في الشكل المقابل:  $AB = 12$  سم،  $جـه = 4$  سم، فإن  $هـ$  تساوي:

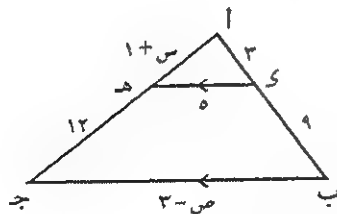
أ) ٦ سم

ب) ٥ سم

ج) ٩ سم

د) ٨ سم

٥) مستطيلان متشابهان بعدد الأول ١٠ سم، ٨ سم، ومحيط الثاني ١٠٨ سم فإن طول المستطيل الثاني يساوي:   
 أ) ١٨ سم ب) ٢٤ سم ج) ٣٠ سم د) ٣٦ سم

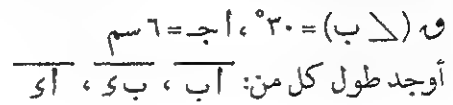


الأسئلة ذات الإجابات القصيرة:

٦) في الشكل المقابل: أوجد قيمة كل من  $s$ ،  $ص$ ، الأطوال مقدرة بالسنتيمترات.

٧)  $AB$  جـ مثلث فيه  $AB = AC$ ،  $جـ \in B$  جـ. رسم  $جـه \perp AB$ ،  $كو \perp AC$ .

أثبت أن:  $\frac{جـه}{كو} = \frac{بـه}{جـو}$



أوجد طول  $\overline{BH}$ ،  $\overline{BH}$ ،  $\overline{BH}$

# الوحدة الرابعة

## نظريات التناسب في المثلث

(١) المستقيمات المتوازية والاجزاء المتناسبة

(٢) نظرية تاليس

(٣) منصفات الزوايا والاجزاء المتناسبة

(٤) تطبيقات التناسب في الدائرة

## تمارين عامة علي الوحدة

## اختبار الوحدة

(١) المستقيمان المتوازيين والأجزاء المتناسبة

نظرية (١) :-

إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث وقطع الضلعين الآخرين فإنه

يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة .

في الشكل المقابل :-  $\Delta PAB$  فيه  $DE \parallel AB$

$$\therefore \frac{PD}{DA} = \frac{PE}{EB}$$

كما لاحظ أنه :-

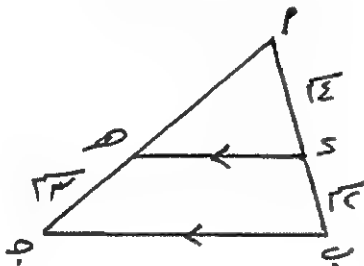
$$\left( \frac{\text{مقدم} + \text{تالي}}{\text{تالي}} = \frac{\text{مقدم} + \text{تالي}}{\text{تالي}} \right)$$

"مرفوعه من القياس"

$$\frac{PD}{DA} = \frac{PE}{EB} \Leftrightarrow \frac{PD + DA}{DA} = \frac{PE + EB}{EB} \Leftrightarrow \frac{PA}{DA} = \frac{PB}{EB}$$

$$\text{أي أن: } \frac{PD}{DA} = \frac{PE}{EB}$$

$$\text{وعليه استنتاج أيضًا: } \frac{PD}{DA} = \frac{PE}{EB}$$

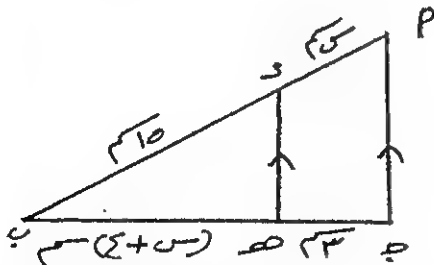


مثال ١ :- في الشكل المقابل :-

أوجد طول  $PD$

الحل :-  $DE \parallel AB$

$$\therefore \frac{PD}{DA} = \frac{PE}{EB} \Leftrightarrow \frac{PD}{4} = \frac{3}{6} \Leftrightarrow PD = \frac{4 \times 3}{6} = 2 \quad \#$$



مثال ٢ :- في الشكل المقابل :-

أوجد قيمة  $DE$

الحل :-  $DE \parallel AB$

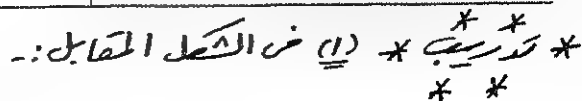
$$\therefore \frac{PD}{DA} = \frac{PE}{EB} \Leftrightarrow \frac{10}{3} = \frac{DE}{5} \Leftrightarrow DE = \frac{10 \times 5}{3} = \frac{50}{3}$$

$$\therefore \frac{PD}{DA} = \frac{PE}{EB} \Leftrightarrow \frac{10}{3} = \frac{DE}{5} \Leftrightarrow DE = \frac{10 \times 5}{3} = \frac{50}{3}$$

$$\# \boxed{DE = \frac{50}{3}}$$



# الابداع في الرياضيات



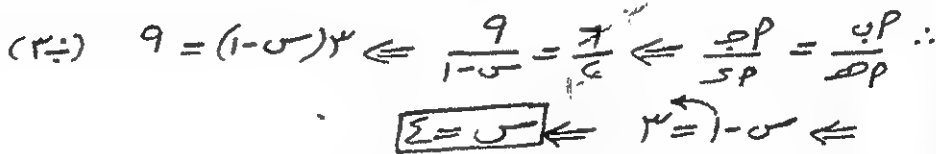
آدم طول آه



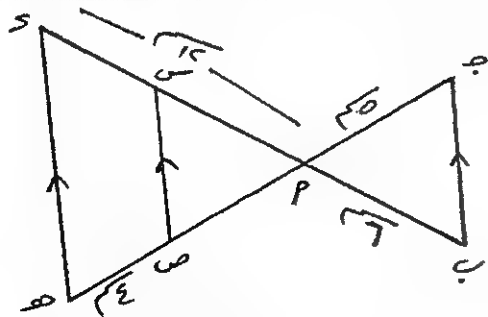
من الشكل المقابل:- ستجيبه خواص التفاضل

مسئله (۳) :- فرض المثلث المثلث المقابل :-

الحل :-  $\therefore 5 \parallel 6$



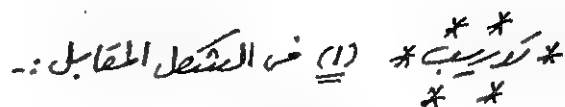
آؤجد طول كل صر ۵۶

$$\frac{dp}{dp} = \frac{sp}{cp} \therefore \overline{dp} // \overline{sp} \therefore \underline{\underline{d.p.s}}$$


# الابداع في الرياضيات

خض  $\Delta$   $SP$   $\therefore \overline{SP} \parallel \overline{SQ} \therefore \frac{SP}{SQ} = \frac{PQ}{QS}$

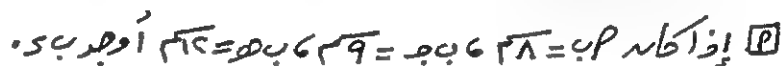
$$\therefore \Sigma_n = \frac{10 \times 8}{10} = 8 \Rightarrow \frac{10}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$



$$\sqrt{V_0} = SP, \sqrt{7} = UP, \overline{50} // \overline{55}$$

$p = \frac{p}{1+s}$  ،  $p = \frac{p}{1+s}$  سے اوجھڑتی ہے

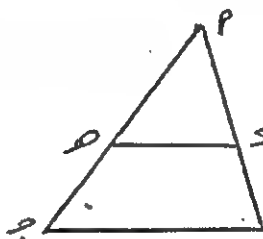
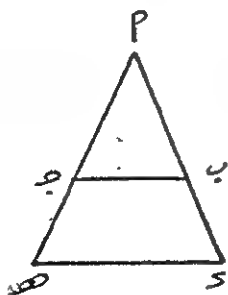
(٢٢) من المشكل المقابل :-



۵) إذا كان  $p = 6$ ,  $q = 9$ ,  $r = 5$ ،  $s = 18$  أو  $p = 6$ ,  $q = 9$ ,  $r = 5$ ,  $s = 18$ .

وإذا قطع مستقيم ضلعين من أضلاع مثلث ، وقسموا إلى قطع أطوالها متناسبة

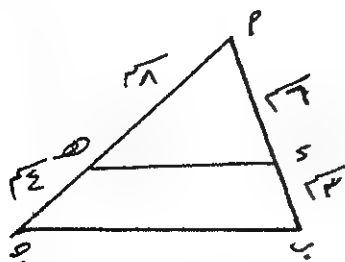
فِيَانِه يَوَازِي الضَّلَعُ الثَّالِثَ .



فرض الشكل المقابل :-

$\frac{dp}{p} = \frac{ds}{s}$  إذا كان

فجاءه  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$



**سؤال ٥ :-** عن الشكل المقابل :- اكتب أنه كذا / بـ

$$c = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{sp}{sp} \quad c = \frac{7}{2} = \frac{sp}{sp} \quad \therefore \text{مضاعف 7} \quad \therefore \underline{\underline{7}}$$

#  $\overline{0.115} \Leftarrow \frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{5p}{0.5} \therefore$

الابداع في الرياضيات

(۱) اَمْسَيْتُ اَنْهَ رَحْمَةُ الْبَرِّ (۲) اَوْ جَدُّهُ لَبَّجَ

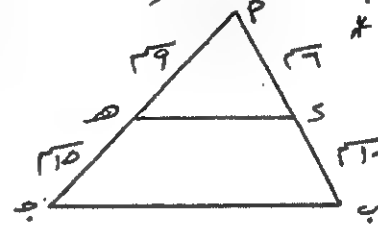
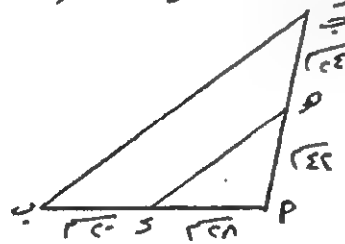
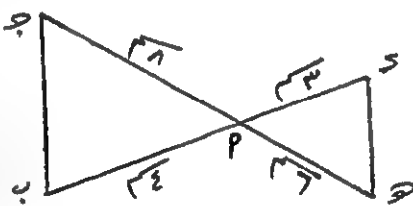
∴  $\mathcal{H}^p \mathcal{H}^q \text{ قائم فر } P \Leftarrow (S^p) - (S^q) = (S^p) \text{ "میشاورت"}$

$$\sqrt{r} = SP \Leftarrow 9 = 17 - 80 = (SP) \therefore$$

$$\frac{ds}{du} = \frac{sp}{up} \therefore \quad \frac{ds}{du} \Delta \sim \frac{sp}{up} \Delta \therefore$$

$$\# \sqrt{10} = \frac{9 \times 0}{9} = 0 \leftarrow \frac{0}{9} = \frac{r}{9} \therefore$$

\* تَدْرِيبٌ \* فَيُكَلِّمُهُ الْإِسْمَاعِيلُ الْآيَةَ هَلْ دَاوُدَ إِذْ آتَاكَ رَبُّكَ أَمْ لَا



فیصل (۷) :- آب جو کی شکل زرخیز خیمہ سے ڈھانپا ہوا ہے اور آج صیغے سے پہلے ۱۱ آب جو

رسم صدق ابد و یقین آرد خراج . انجبت انه صدق ابدی

الکلمہ :- جس  $\Delta$  پر  $P$  ہے

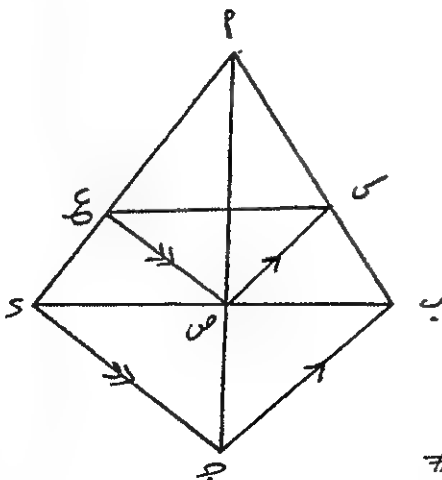
$$\therefore \frac{P}{P_0} = \frac{P}{P_0} \therefore \frac{P}{P_0} = \frac{P}{P_0} \quad \text{①}$$

خز  $\Delta$  P ی چ

$$\textcircled{F} \leftarrow \frac{\frac{\partial P}{\partial \omega}}{\frac{\partial \omega}{\partial \xi}} = \frac{\xi P}{S\xi} \therefore \overline{S\xi} \parallel \overline{\xi P} \therefore$$

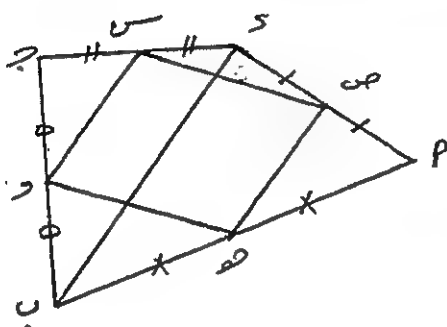
عدد ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮ ⑯ ⑰ ⑱ ⑲ ⑳ ㉑ ㉒ ㉓ ㉔ ㉕ ㉖ ㉗ ㉘ ㉙ ㉚ ㉛ ㉜ ㉝ ㉞ ㉟ ㊱ ㊲ ㊳ ㊴ ㊵ ㊶ ㊷ ㊸ ㊹ ㊺ ㊻ ㊼ ㊽ ㊾ ㊿ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮ ⑯ ⑰ ⑱ ⑲ ⑳ ㉑ ㉒ ㉓ ㉔ ㉕ ㉖ ㉗ ㉘ ㉙ ㉚ ㉛ ㉜ ㉝ ㉞ ㉟ ㊱ ㊲ ㊳ ㊴ ㊵ ㊶ ㊷ ㊸ ㊹ ㊺ ㊻ ㊼ ㊽ ㊾ ㊿

#  $\overline{S \cup T} \therefore \frac{\overline{S \cup T}}{\overline{S}} = \frac{\overline{S \cup T}}{\overline{S}} \therefore S \cup T \subset \overline{S}$



\* تدريس \* مبدى شكل رباعي تقاطع قطراه ضم . رسم م ه // P و تقطع P ب م ه  
رسم م د ا ب ج د و تقطع ب ج م و . اثبت انه ه د ا ب ج .

مثال ① :- اذا كان ه ، و ، س من منتصفات الاضلاع ا ب ، ب ج ، ج د ، د ا من الشكل  
الرباعي م ب ج د . هل الشكل ه و س من متوازي اضلاع ؟ .



الحل :- الفل :- ترسم ب د

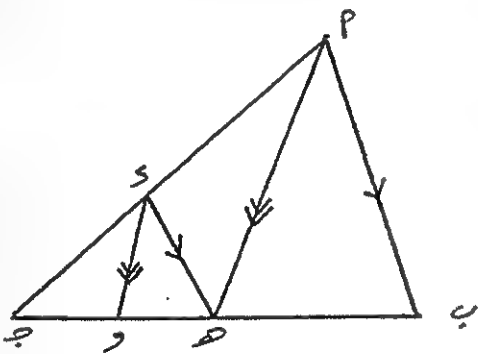
من ه م ب د :- ه منتصف ا ب ، ه منتصف ب د

:- ه د ا ب ج ، ه ه = ح د ب ← ①

من ه ج ب د :- ه منتصف ب ج ، ه منتصف ج د

:- و س ا ب ج ، و س = ح د ب ← ②

من ه ا ب ج ، ه ه = و س ، و س = ح د ب :- الشكل ه و س من  
متوازي اضلاع #



مثال ② :- من الشكل المقابل :- م ب ج ه د ، م د ا ب ج

د ه ا ب ج ، م د ا ب ج . اثبت انه (ج ه) = ج د و ج ب

البرهان :-

من ه م ب ج :-

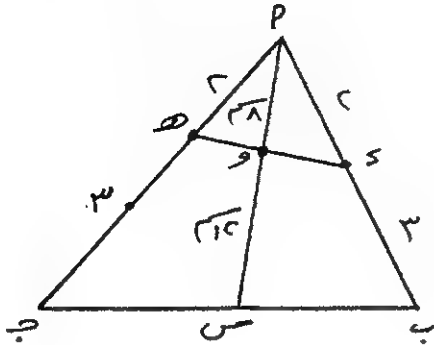
:- د ه ا ب ج :-  $\frac{ج د}{ج ب} = \frac{ج د}{م ب}$  ← ①

من ه م د ج :-

:- د و ا ب ج :-  $\frac{ج د}{ج ب} = \frac{ج د}{م ب}$  ← ②

من ه ا ب ج ، ه ه = و س ، و س = ح د ب :- (ج ه) = ج د و ج ب #

مثال ١٠ :-  $P$  ابداع مثلث  $ABC$  ، حيث  $AP = 3$  ،  $BP = 4$  ،  $CP = 5$  ، حيث  $AP \perp BC$  ،  $BP \perp AC$  ،  $CP \perp AB$  ، حيث  $AP$  رسم  $AP$  يقطع  $BC$  في  $D$  ، وإذا كان  $P = O$  ،  $AP = 3$  ،  $BP = 4$  ،  $CP = 5$  ، حيث  $AP$  أثبت أن النقطة  $D$  ، و  $E$  على استقامة واحدة .



$$\frac{AP}{PD} = \frac{BP}{PE} \Rightarrow \frac{3}{3} = \frac{4}{4} \Rightarrow \frac{AP}{PD} = \frac{BP}{PE} \Rightarrow \frac{AP}{BP} = \frac{PD}{PE}$$

المثلث  $APD$  و  $BPD$  .

$$\frac{AP}{PD} = \frac{BP}{PE} = \frac{AP}{BP} = \frac{PD}{PE} \Rightarrow \frac{AP}{BP} = \frac{PD}{PE}$$

$$\frac{AP}{BP} = \frac{PD}{PE} \Rightarrow \frac{AP}{PD} = \frac{BP}{PE} \Rightarrow \frac{AP}{BP} = \frac{PD}{PE}$$

المثلث  $APD$  و  $BPD$  .

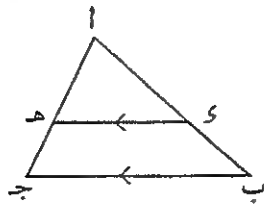
$$\frac{AP}{PD} = \frac{BP}{PE} = \frac{AP}{BP} = \frac{PD}{PE} \Rightarrow \frac{AP}{BP} = \frac{PD}{PE}$$

$$\frac{AP}{BP} = \frac{PD}{PE} \Rightarrow \frac{AP}{PD} = \frac{BP}{PE} \Rightarrow \frac{AP}{BP} = \frac{PD}{PE}$$

منه  $\angle APE = \angle BPD$  ، ونقطة مشتركة  $P$  ، و  $AP \perp BC$  ،  $BP \perp AC$  ،  $CP \perp AB$  ، حيث  $AP$  أثبت أن النقطة  $D$  ، و  $E$  على استقامة واحدة .

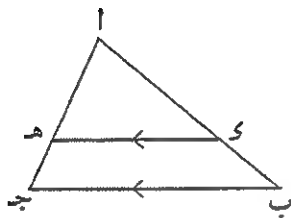
تمارين على "المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة"

١) في الشكل المقابل  $\overline{هـ} \parallel \overline{ب ج}$  أكمل:



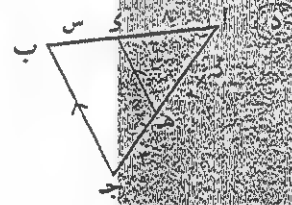
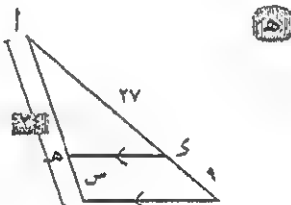
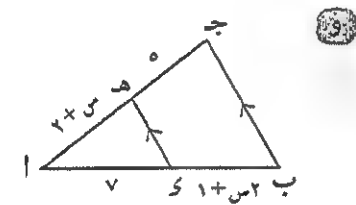
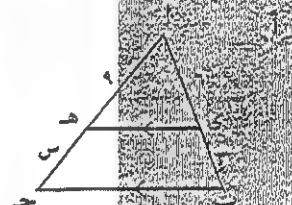
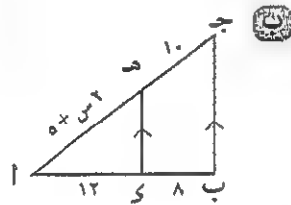
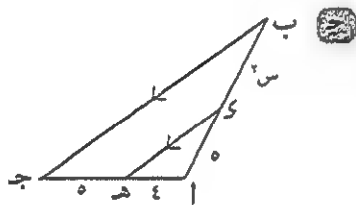
أ. إذا كان  $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$  فإن  $\frac{AE}{EC} = \frac{2}{3}$  ،  $\frac{AB}{BC} = \frac{5}{3}$  ،  $\frac{ج هـ}{هـ ا} = \frac{5}{3}$   
 ب. إذا كان  $\frac{AD}{DB} = \frac{4}{5}$  فإن  $\frac{AE}{EC} = \frac{4}{5}$  ،  $\frac{AB}{BC} = \frac{9}{5}$  ،  $\frac{ج هـ}{هـ ا} = \frac{9}{5}$

٢) في الشكل المقابل  $\overline{هـ} \parallel \overline{ب ج}$ . حدد العبارات الصحيحة من ما يلي:

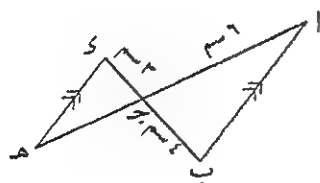


١)  $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DB}$  (خ)  
 ٢)  $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EC}$  (خ)  
 ٣)  $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$  (خ)  
 ٤)  $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EB}$  (خ)  
 ٥)  $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DB} + \frac{AE}{EC}$  (خ)  
 ٦)  $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DB} \cdot \frac{AE}{EC}$  (خ)  
 ٧)  $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DB} + \frac{AE}{EC} + \frac{AD}{DB} \cdot \frac{AE}{EC}$  (خ)  
 ٨)  $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DB} + \frac{AE}{EC} + \frac{AD}{DB} \cdot \frac{AE}{EC} + \frac{AD}{DB} \cdot \frac{AE}{EC} \cdot \frac{AD}{DB}$  (خ)

٣) في كل من الأشكال التالية  $\overline{هـ} \parallel \overline{ب ج}$ . أوجد قيمة س العددية (الأطوال بالسنتيمترات).

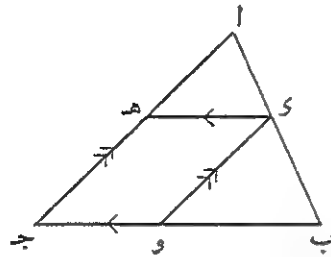


٤) في الشكل المقابل:  $\overline{أ ب} \parallel \overline{هـ} \parallel \overline{ج د}$  ،  $\overline{أ هـ} \cap \overline{ب د} = \{ج\}$



أ.  $ج = 3$  سم ،  $ب = 4$  سم ،  $ج د = 3$  سم  
 ب. أوجد طول جـ هـ

٥) س ص ٨ ع ل = {م}، حيث س ع // ل ص، فإذا كان س م = ٩ سم، ص م = ١٥ سم، ع ل = ٣٦ سم. أوجد طول ع م.



٦) لكل مما يأتي: استخدم الشكل المقابل والبيانات المعطاة لإيجاد قيمة س:

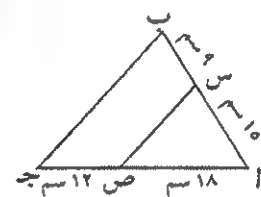
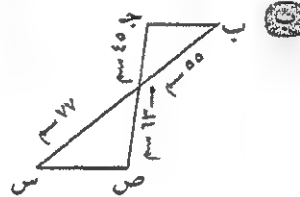
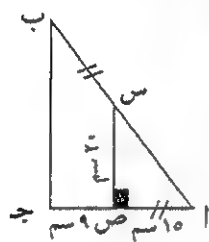
١) أ د = ٤، ب د = ٨، ج د = ٦، أ ه = س.

٢) أ ه = س، ه د = ٥، أ د = س - ٢، د ب = ٣.

٣) أ ب = ٢١، ب و = ٨، و ج = ٦، أ د = س.

٤) أ د = س، ب و = س + ٥، د ب = ٢، و ج = ٣، أ ج = ١٢.

٧) في كل من الأشكال التالية، حدد ما إذا كان س ص // ب ج



٨) س ص ع مثلث فيه س ص = ١٤ سم، س ع = ٢١ سم، ل ٣ س ص بحيث س ل = ٦، ٥ سم،

م ٣ س ع حيث س م = ٤، ٨ سم. أثبت أن ل م // ص ع

٩) في المثلث أ ب ج، د ٣ أ ب، ه ٣ أ ج، ه د = ٤، ه ج =

إذا كان أ د = ١٠ سم، د ب = ٨ سم. حدد ما إذا كان د ه // ب ج. فسر إجابتك.

١٠) أ ب ج د شكل رباعي تقاطع قطراه في ه فإذا كان أ ه = ٦ سم، ب ه = ١٣ سم، ه و = ١٠ سم،

ه د = ٧، ٨ سم. أثبت أن الشكل أ ب ج د شبه منحرف.

١١) أثبت أن القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين في مثلث يوازي ضلعه الثالث، وطولها يساوي نصف طول هذا الضلع.

١٢) أ ب ج د مثلث، د ٣ أ ب حيث أ د = ٢، د ب = ٥، ه ٣ أ ج حيث ه د = ٣، ه ج = ٥، رسم أ س يقطع ب ج في س. إذا كان أ و = ٨ سم، أ س = ٢٠ سم، حيث و ٣ أ س. أثبت أن النقط د، و، ه على استقامة واحدة.

١٣) أ ب ج د مثلث، د ٣ ب ج، بحيث د ج = ٤، ه ٣ أ د، بحيث أ د = ٣، رسم ج ه فقطع أ ب في س، رسم د و // ج س فقطع أ ب في ص. أثبت أن أ س = ب و.

١٤) أ ب ج د مستطيل تقاطع قطراه في م. ه منتصف أ م، و منتصف م ج. رسم د ه يقطع أ ب في س، ورسم د و يقطع ب ج في ص. أثبت أن: س ص // أ ج.

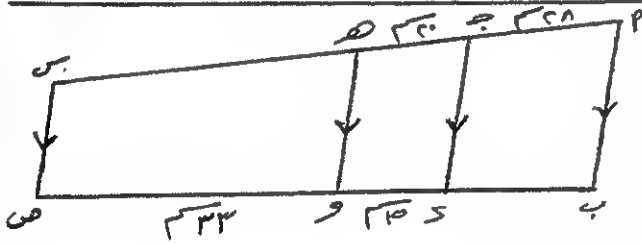
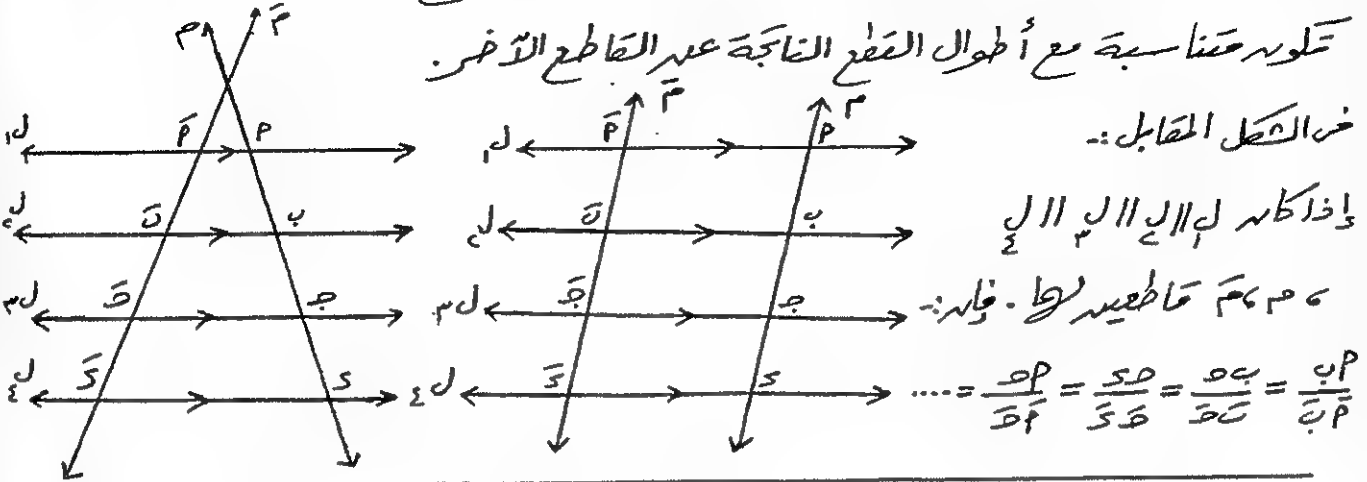
مكتبة وسام

شروين - شارع حسني مبارك - خلف الثانوية بنات  
01004423597.3943035

د) نظرية تاليس

نظرية د) [ نظرية تاليس العامة ]:

إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمتان متوازيتان فإِنَّ أطوال القطع الناتجة عند أحد القاطعين تتكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة عند القاطع الآخر.



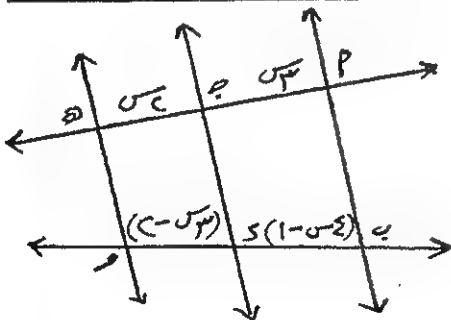
مثال ١ :- من الشكل المقابل :-

أوجد طول كل من  $BE$  و  $ED$

الحل :-  $\because \overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$

$$\therefore \frac{AB}{BE} = \frac{BE}{ED} = \frac{ED}{DC} \Leftrightarrow \frac{2}{BE} = \frac{BE}{ED} = \frac{ED}{5}$$

$$\therefore BE = \frac{2 \times 5}{2} = 5 \text{ سم} \quad ED = \frac{5 \times 5}{5} = 5 \text{ سم}$$



مثال ٢ :- من الشكل المقابل :-

أوجد قيمة  $x$  العددية

الحل :-  $\because \overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$

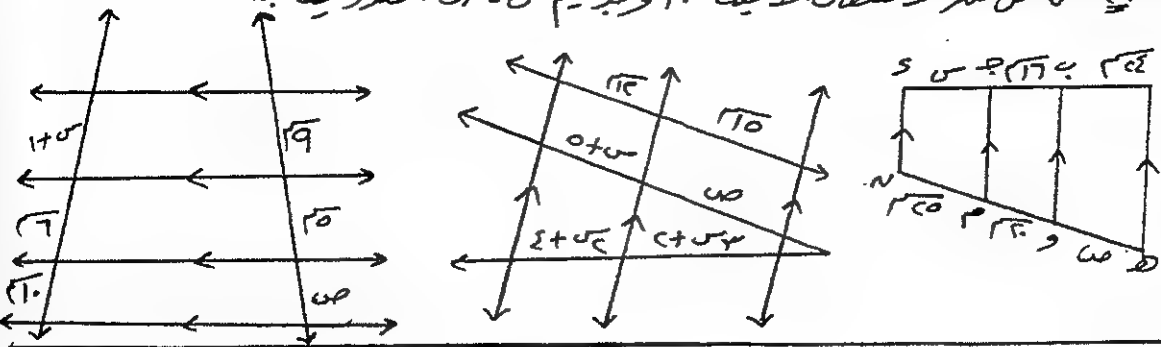
$$\therefore \frac{AB}{BE} = \frac{BE}{ED} = \frac{ED}{DC} \Leftrightarrow \frac{2}{x} = \frac{x}{5} = \frac{5}{10-x}$$

$$2 + x = 5 + 5 \Leftrightarrow 2 + x = 10 \Leftrightarrow x = 8$$

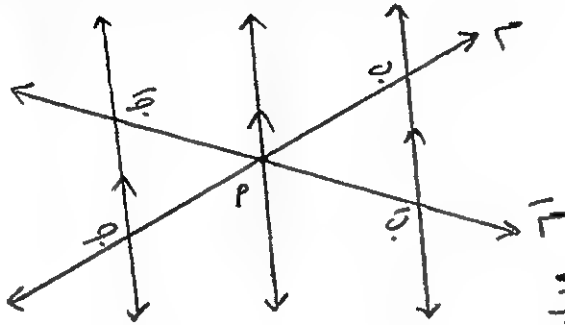
$$\therefore \boxed{x = 8}$$



(١) \* \* \* \* \* من كل عدد الاشكال الآتية. أوجد قيم  $s$ ، من العددية :-



هـ "ثالثة خاصة" :-

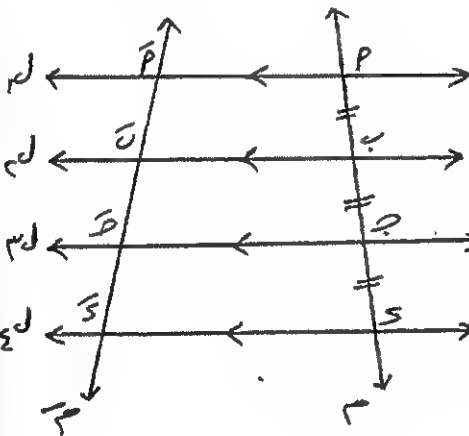


إذا تقاطع مستقيمان  $m$ ،  $n$  في النقطة  $P$

وكان  $\vec{PB} \parallel \vec{AQ}$  فإنه  $\frac{\vec{BP}}{\vec{AP}} = \frac{\vec{BP}}{\vec{AP}}$

وبالعكس :- إذا كان  $\frac{\vec{BP}}{\vec{AP}} = \frac{\vec{BP}}{\vec{AP}}$  فإنه  $\vec{PB} \parallel \vec{AQ}$

نظرية تاليس الخاصة :-



إذا كانت أطوال القطع الناتجة عند أحد القاطعين

متساوية فإنه أطوال القطع الناتجة عند القاطع الآخر متساوية.

من الشكل المقابل :-  $l \parallel m \parallel n$ ،  $AB$ ،  $CD$ ،  $EF$  قاطعاتها

وكان  $AP = BP = CP$  فإنه  $AD = BE = CF$ .

مثال (٣) :- من الشكل المقابل :-

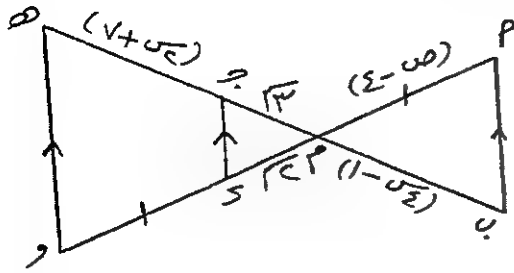
أوجد قيم  $s$  العددية

الحل :-  $\because \vec{AP} \parallel \vec{BQ} \parallel \vec{CR}$

$\therefore \vec{AS} = \vec{BS} \therefore \vec{AP} = \vec{BP}$

$$\boxed{0 = s} \Leftrightarrow 3 + s = s = 5 \Leftrightarrow s + 5 = 2 - 5s \Leftrightarrow 6 = -6s \Leftrightarrow s = -1$$

$$\boxed{3 = 5s} \Leftrightarrow 7 = 3 + 5s \Leftrightarrow 1 + 0 = 2 + 5s \Leftrightarrow 1 + s = 2 + 5s \Leftrightarrow 0 = 4s \Leftrightarrow s = 0$$



مثال ٤ :- من الشكل المقابل :-

أوجد قيم من من العودية .

الحل :- :-  $AP \parallel SB \parallel PQ$

$$\therefore \frac{SP}{SB} = \frac{PS}{SB} = \frac{PB}{SB}$$

$$\frac{2-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{3} = \frac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$

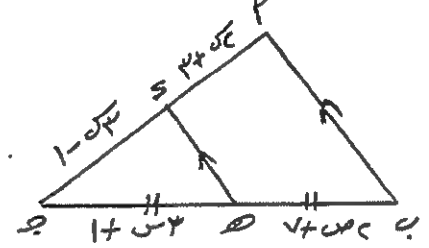
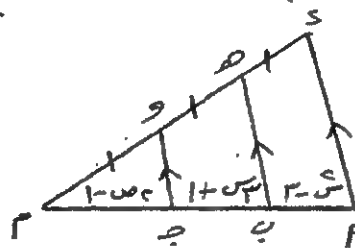
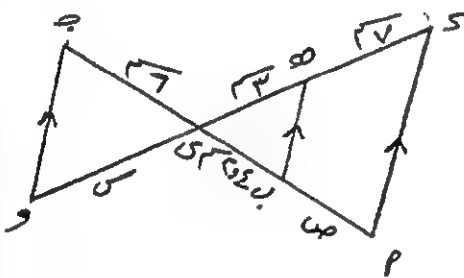
$$1+\sqrt{2}=1-\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \therefore \Leftrightarrow$$

$$\# \boxed{2=\sqrt{2}} \Leftrightarrow 1=\sqrt{2} \Leftrightarrow 1+1=\sqrt{2}-\sqrt{2}$$

$$10=2-\sqrt{2} \xrightarrow{(2 \div)} 20=(2-\sqrt{2})2 \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{2-\sqrt{2}}{10} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \therefore$$

$$\# \boxed{12=\sqrt{2}}$$

\* \* \* ترتيب \* \* \* من كل من الاشكال الآتية أوجد قيمة كلا من من العودية :-



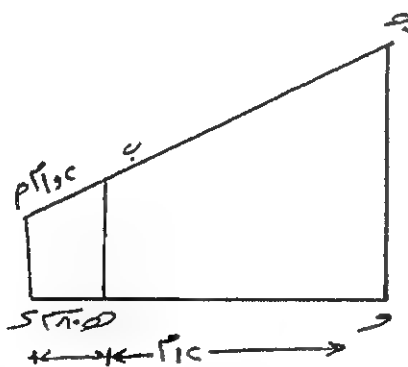
مثال ٥ من الشكل المقابل :-

س هـ و مسقط بـ بـ جـ على الأفق بنفس الترتيب

$$AB = 2 \text{ و } AC = 5 \text{ و } DE = 38$$

أوجد طول P جـ لأقرب متر

الحل :- :- س هـ و مسقط بـ بـ جـ

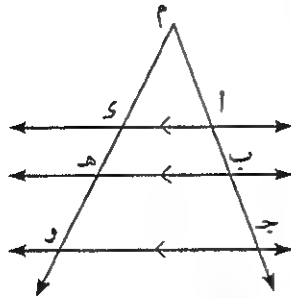


$$\therefore PQ \parallel AB \parallel SP \therefore \frac{SP}{SB} = \frac{PB}{SB} \Leftrightarrow \frac{2+\sqrt{2}}{20} = \frac{2}{10}$$

$$\# \therefore 20 = \frac{10 \times 10}{2} = 50$$

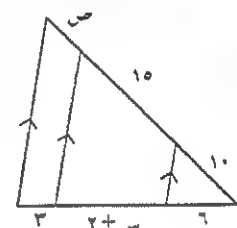
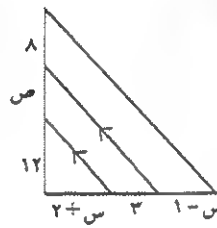
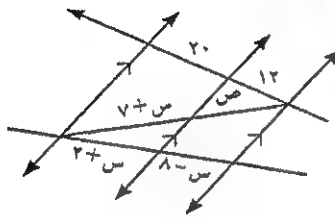
## تمارين على "نظرية تاليس"

١٥) اكتب ما تساويه كل من النسب التالية مستخدماً الشكل المقابل:

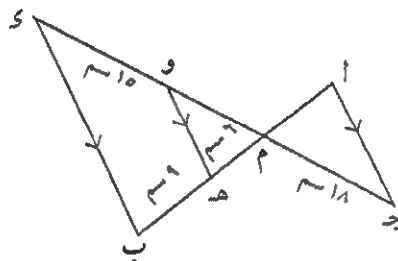


$\frac{\text{س}}{\text{هـ}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}}$	$\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{هـ}}$
$\frac{\text{س}}{\text{و}} = \frac{\text{ا}}{\text{ج}}$	$\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{م}}{\text{ج}}$
$\frac{\text{و}}{\text{ج}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}}$	$\frac{\text{م}}{\text{ج}} = \frac{\text{ب}}{\text{هـ}}$
$\frac{\text{و}}{\text{م}} = \frac{\text{ج}}{\text{ا}}$	$\frac{\text{ب}}{\text{ج}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}}$

١٦) في كل من الأشكال التالية، احسب قيم س، ص العددية (الأطوال مقدرة بالاستقيمات)



١٧) في الشكل المقابل:



$\overline{أب} \cap \overline{جـ د} = \{م\}$ ،  $\overline{هـ د} \ni م$ ،  $\overline{أ ج} \ni م$ ،  $\overline{أ د} \ni م$ ،  $\overline{ب د} \ni م$

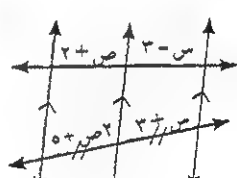
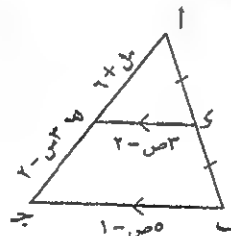
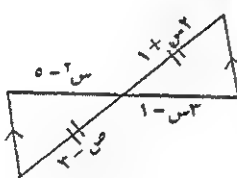
أوجد:

طول م و  
طول أ م

١٨)  $\overline{أب} \cap \overline{جـ د} = \{هـ\}$ ،  $\overline{أ ب} \ni هـ$ ،  $\overline{أ ج} \ni هـ$ ،  $\overline{أ د} \ni هـ$ ،  $\overline{ب د} \ni هـ$ ، وكان  $\overline{س ص} \parallel \overline{ب د} \parallel \overline{أ ج}$

أثبت أن:  $أ س \times هـ د = ج د \times هـ ب$

١٩) في كل من الأشكال التالية، احسب قيم س، ص العددية:



٢٠) أ ب جـ د شكل رباعي فيه  $\overline{أ ب} \parallel \overline{جـ د}$ ، تقاطع قطراه في م، نصف  $\overline{ب جـ}$  في هـ، ورسم  $\overline{هـ و} \parallel \overline{أ ب}$ ، ويقطع  $\overline{ب د}$  في س،  $\overline{أ جـ}$  في ص،  $\overline{أ و}$  في و.

أثبت أن:

$\frac{\text{أ و}}{\text{جـ م}} = \frac{\text{أ و}}{\text{جـ م}}$

$\frac{\text{أ و}}{\text{جـ م}} = \frac{\text{أ و}}{\text{جـ م}}$

(٣) مميزات الزوايا والأجزاء المتناسبة

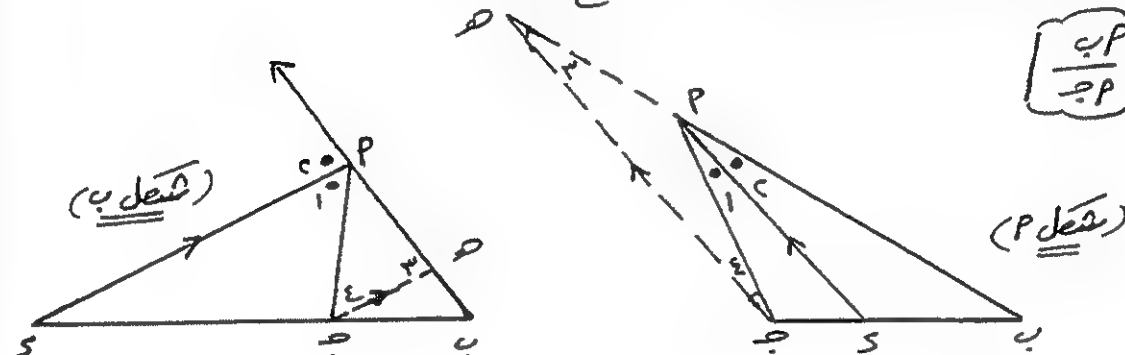
نظرية (٣) :-

إذا نُصِفَت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عندها الرأس  
تقسم المُنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جزئين النسبة بين طوليها  
تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين.

في الشكل المقابل :-  $P$  ب ج مثلث

$SP$  ينصف  $DB$  (من الداخل في شكل  $P$  ، من الخارج في شكل  $B$ )

$$\therefore \frac{BP}{BP} = \frac{SP}{PS}$$



البرهان :-

$$\therefore SP \text{ ينصف } DB \quad \therefore \angle 1 = \angle 2$$

$$\therefore PS \parallel DB \quad \therefore \angle 1 = \angle 2 \quad \text{(بالتبادل)} \quad \angle 3 = \angle 4 \quad \text{(بالتقاطع)}$$

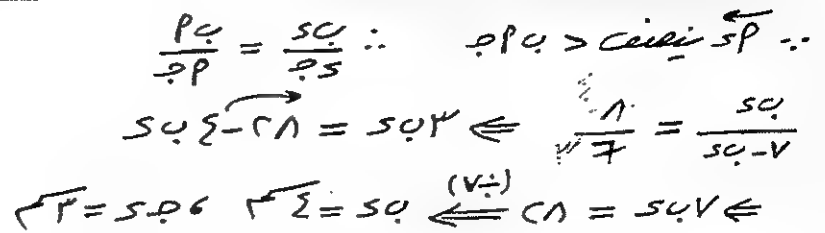
$$\therefore \angle 1 = \angle 2 \quad \therefore \angle 3 = \angle 4 \quad \therefore PS \parallel DB \quad (1)$$

$$(c) \quad \frac{BP}{BP} = \frac{SP}{PS} \quad \therefore PS \parallel DB$$

$$\# \quad \frac{BP}{BP} = \frac{SP}{PS} \quad \text{ينفج أو} \quad (c) \text{ و } (1)$$

مثال (١) :-  $P$  ب ج مثلث فيه  $AP = 4$  ،  $BP = 6$  ،  $CP = 7$  ، رسم  $AK$  ينصف  
 $BC$  ،  $AK$  يقطع  $BP$  في  $S$  أو  $AK$  يقطع  $BP$  في  $S$  أو  $AK$  يقطع  $BP$  في  $S$  أو  $AK$  يقطع  $BP$  في  $S$   
الطلب :-

## الابداع في الرياضيات

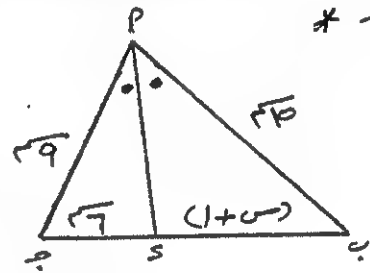
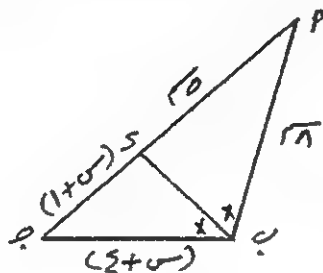


فأذا كان  $p = 6$  م  $p = 8$  م  $p = 10$ . أو بعد طول جد.



$$\frac{SC}{C} = \frac{7}{n} \Leftarrow \frac{P.D}{U.P} = \frac{S.D}{U.S} \therefore$$

$$\sqrt{0} = 10 - 0 = 10 \therefore \sqrt{10} = \frac{C \times 7}{n} = SC \Leftarrow$$



5 ج = ۴۸۱۸ اذا كان مجموع ۵ P نبيج = ۳۸۰ او مجموع كل عدد 6 P نبيج



$\frac{P}{\rho} = \frac{15}{1.2} = 12.5 \leftarrow$

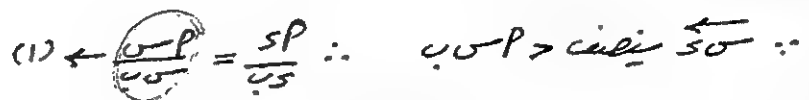
∴ محیط  $\Delta PQR = PQ + QR + RP \leq PQ + QR + PR = 10$

$$r = \frac{\sum \lambda}{17} = 0 \leftarrow \sum \lambda = 0 \cdot 17 \leftarrow n = 3c + 0 \cdot 9 + 0 \cdot v$$

$$\# \sqrt{c}v = r \times q = p \times \sqrt{c} \quad \sqrt{c}1 = r \times v = p \therefore$$

# الابداع في الرياضيات

الکلمہ :- مغز  $\Delta$   $P$  سے سب



(c)  $\leftarrow \frac{2p}{2p} = \frac{2p}{2p} \therefore$

$$\# \overline{50} // \overline{55} \therefore \frac{50}{55} = \frac{5P}{55} \therefore$$


الحل :-  $\vec{A}$  ونصف  $\vec{B}$   $\vec{C}$  ونصف  $\vec{D}$   $\vec{E}$  ونصف  $\vec{F}$   $\vec{G}$  ونصف  $\vec{H}$   $\vec{I}$  ونصف  $\vec{J}$   $\vec{K}$  ونصف  $\vec{L}$   $\vec{M}$  ونصف  $\vec{N}$   $\vec{O}$  ونصف  $\vec{P}$   $\vec{Q}$  ونصف  $\vec{R}$   $\vec{S}$  ونصف  $\vec{T}$   $\vec{U}$  ونصف  $\vec{V}$   $\vec{W}$  ونصف  $\vec{X}$   $\vec{Y}$  ونصف  $\vec{Z}$   $\vec{A}$  ونصف  $\vec{B}$   $\vec{C}$  ونصف  $\vec{D}$   $\vec{E}$  ونصف  $\vec{F}$   $\vec{G}$  ونصف  $\vec{H}$   $\vec{I}$  ونصف  $\vec{J}$   $\vec{K}$  ونصف  $\vec{L}$   $\vec{M}$  ونصف  $\vec{N}$   $\vec{O}$  ونصف  $\vec{P}$   $\vec{Q}$  ونصف  $\vec{R}$   $\vec{S}$  ونصف  $\vec{T}$   $\vec{U}$  ونصف  $\vec{V}$   $\vec{W}$  ونصف  $\vec{X}$   $\vec{Y}$  ونصف  $\vec{Z}$

$$\frac{dp}{p} = \frac{ds}{s} \therefore p \propto s \therefore p > \text{increases}$$

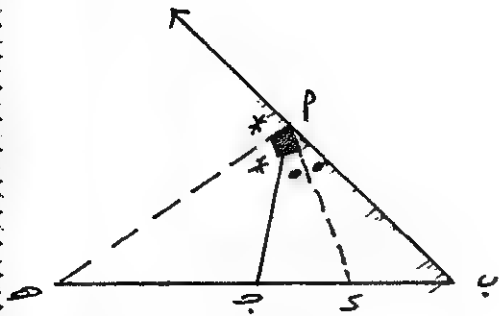
من ملحوظة :-  
صنفان زوايا المثلث تقاطع  
جنتا في نقطة واحدة

(د) خرابی مشکل المقابل :-



رسم "ملاحظات هامة"

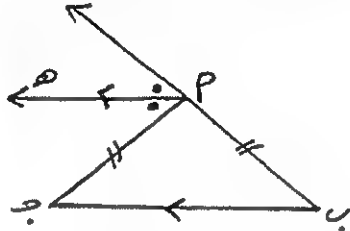
① في الشكل المقابل :- إذا كان  $P$  ،  $A$  نصف الزاوية  $P$  والزاوية الخارجة للمثلث عند  $P$  على الترتيب فإنه :-



$$\frac{BP}{CP} = \frac{AS}{CS} \quad \frac{AP}{CP} = \frac{BS}{CS} \quad \therefore \frac{BP}{CP} = \frac{AS}{CS} \quad \frac{AP}{CP} = \frac{BS}{CS}$$

:- القاعدة بقدر تنقسم من الداخل في  $S$  ومن الخارج في  $P$  بنفس النسبة  $(BP:CP)$

وبلا حظ أنه :- المنصفين الداخلي والخارجي  $P$  ،  $A$  متعامدان أي  $90^\circ$



② في الشكل المقابل :- إذا كان  $A$  نصف الزاوية الخارجة

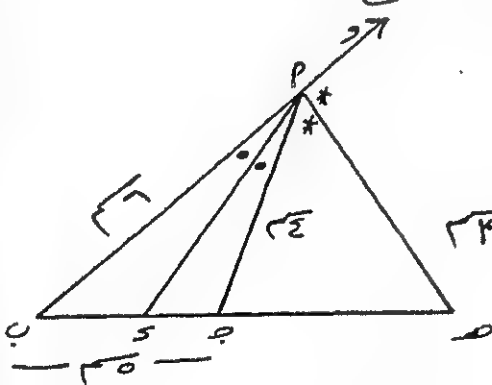
للمثلث  $P$  عند  $P$  حيث  $BP = CP$  وكان  $BP = CP$

فإنه  $AP \parallel BC$

أي أنه المنصف الخارج للزاوية رأس مثلث متساوي الساقين يكون موازيًا للقاعدة

مثال ① :-  $P$  ب  $C$  مثلث فيه  $AP = BP$  ،  $AP = BP$  ،  $AP = BP$  ، رسم  $A$  نصف  $P$

ولقطع  $BC$  في  $S$  ورسم  $A$  نصف  $P$  الخارجة ولقطع  $BC$  في  $S$  هو  $AP$  و



الكل :-  $AP$  نصف  $P$  ب  $C$

$$\frac{AP}{CP} = \frac{BS}{CS} \quad \frac{AP}{CP} = \frac{BS}{CS} \quad \therefore \frac{AP}{CP} = \frac{BS}{CS}$$

$$AP = BP \quad \therefore \frac{AP}{CP} = \frac{BS}{CS} \quad \therefore \frac{AP}{CP} = \frac{BS}{CS}$$

$$AP = BP \quad \therefore \frac{AP}{CP} = \frac{BS}{CS} \quad \therefore \frac{AP}{CP} = \frac{BS}{CS}$$

$AP$  نصف  $P$  ب  $C$  الخارجة

$$\frac{AP}{CP} = \frac{BS}{CS} \quad \frac{AP}{CP} = \frac{BS}{CS} \quad \therefore \frac{AP}{CP} = \frac{BS}{CS}$$

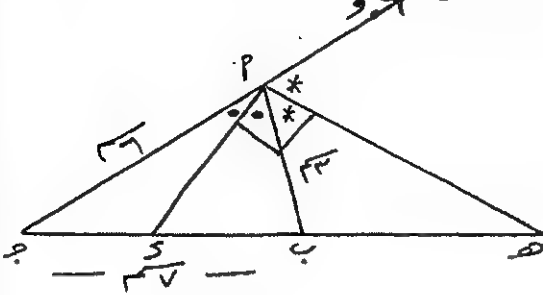
$$AP = BP \quad \therefore \frac{AP}{CP} = \frac{BS}{CS} \quad \therefore \frac{AP}{CP} = \frac{BS}{CS}$$

$$AP = BP \quad \therefore \frac{AP}{CP} = \frac{BS}{CS} \quad \therefore \frac{AP}{CP} = \frac{BS}{CS}$$

مكتبة وسام  
شؤون شارع حسني مبارك خلف الثانوية بنات  
01004423597.3943035

مثال ٧:  $\therefore P$  ب ج مثلث فيه  $P = 60^\circ$ ،  $B = 70^\circ$ ،  $C = 50^\circ$ . رسم  $P$  كـ نصف  $P >$

ويقطع ب ج في  $S$  ورسم  $P$  كـ نصف  $P >$  الخارج ويقطع ب ج في  $T$ .



(١) اثبت أن  $P$  ب متوسط من  $\Delta P$  ج هـ

(٢) أوجد النسبة بين مساحه  $\Delta P$  هـ و مساحه  $\Delta P$  ج هـ

الحل:  $\therefore P$  كـ نصف  $P >$

$$\frac{7}{14} = \frac{PS}{BS-7} \iff \frac{P}{BP} = \frac{PS}{BP} \iff$$

$$\iff PS = 7 \iff 14 = BS \iff BS = 14 \iff BS = 14 \iff BS = 14$$

$$\therefore BS = 14 - 7 = 7 \iff \frac{7}{14} = \frac{PS}{BS} \iff$$

$$\therefore P \text{ كـ نصف } P > \text{ الخارجة } \iff \frac{P}{BP} = \frac{PS}{BP} \iff \frac{7}{14} = \frac{PS}{BP} \iff$$

$$\iff BS = 7 + 7 = 14 \iff BS = 14 \iff BS = 14 \iff BS = 14$$

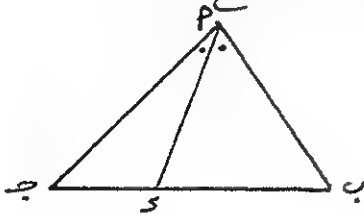
$\therefore BS = 7 = BS = 7 \iff P$  ب متوسط من  $\Delta P$  ج هـ  $\therefore$

$$\therefore \frac{PS}{BS} = \frac{PS}{BS} = \frac{PS}{BS} = \frac{PS}{BS} \quad (\text{لأنه جانفس الارتفاع})$$

إيجاد طول المنصف الداخلي والمنصف الخارج من زاوية رأس مثلث:

قوله مشهور:

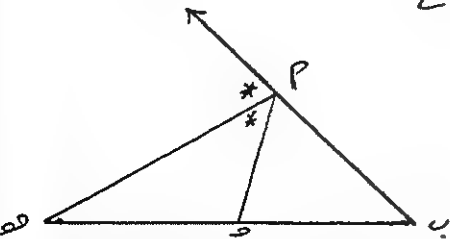
إذا كان  $P$  كـ نصف  $P >$  من  $\Delta P$  ج هـ الداخلي ويقطع ب ج في  $S$



$$PS = BP \times PS - BS \times PS$$

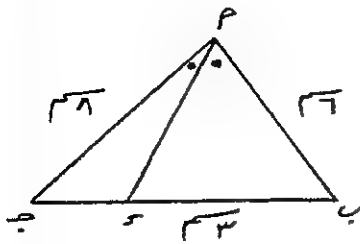
هـ "ملاحظة": إذا كان  $P$  كـ نصف  $P >$  من  $\Delta P$  ج هـ الخارج ويقطع ب ج في  $T$

$$PT = BP \times PT - BT \times PT$$



جميل غالي السيد





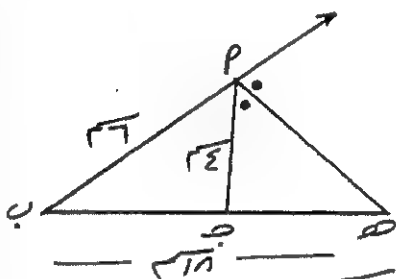
مثال ٨ :- في الشكل المقابل :-

أوجد طول AP

الحل :-  $AP > BP$  ...  $AP$  نصف  $BC$

$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{PC}{BP} \Leftrightarrow \frac{7}{8} = \frac{3}{BP} \Leftrightarrow BP = \frac{8 \times 3}{7} = \frac{24}{7}$$

$$\therefore AP = \sqrt{AC^2 - PC^2} = \sqrt{10^2 - 3^2} = \sqrt{91} = \sqrt{49 \times 13} = 7\sqrt{13}$$



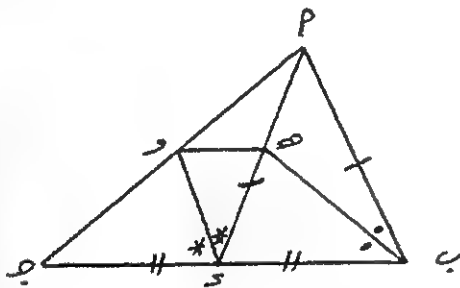
مثال ٩ :- في الشكل المقابل :-

أوجد طول AP

الحل :-  $AP > BP$  نصف  $BC$  الخارجية

$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{PC}{BP} \Leftrightarrow \frac{7}{12} = \frac{18}{BP} \Leftrightarrow BP = \frac{12 \times 18}{7} = \frac{216}{7}$$

$$\therefore AP = \sqrt{AC^2 - PC^2} = \sqrt{19^2 - 18^2} = \sqrt{361 - 324} = \sqrt{37} = \sqrt{13 \times 29} = \sqrt{377}$$



مثال ١٠ :- في الشكل المقابل :-

اثبت أنه  $AP \parallel BC$

الحل :-  $AP > BP$  نصف  $BC$

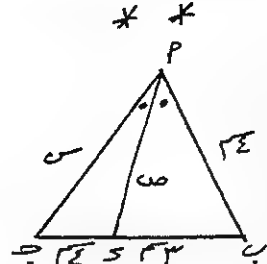
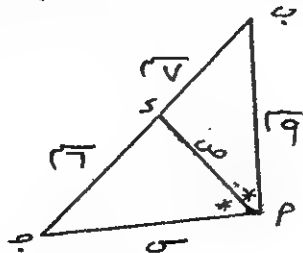
$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{PC}{BP} \Leftrightarrow (1)$$

$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{PC}{BP} \Leftrightarrow (2)$$

$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{PC}{BP} \Leftrightarrow (1) \text{ من } (1) \Leftrightarrow \frac{AP}{BP} = \frac{PC}{BP}$$

$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{PC}{BP} \Leftrightarrow \frac{AP}{BP} = \frac{PC}{BP} \Leftrightarrow \frac{AP}{BP} = \frac{PC}{BP}$$

# الابداع في الرياضيات



$\therefore \overrightarrow{SP}$  is perpendicular to  $AB$ .

مثال ⑪ :- في الشكل المقابل :- تكون نصف د. P و R

$$\frac{SP}{SP} = \frac{2P}{P} \therefore 5 > \text{increases} \therefore$$

$$(1) \leftarrow \frac{\Sigma}{r} = \frac{2p}{2} \leftarrow \frac{2}{2} = \frac{2p}{2} \therefore$$

$$(c) \leftarrow \frac{2}{3} = \frac{OP}{\frac{OP}{2}} \Leftrightarrow \frac{15}{9} = \frac{OP}{\frac{OP}{2}} \therefore \Delta \text{ ب } P \text{ ج}$$

مسئله ۱۱۱)  $\frac{dp}{ds} = \frac{p}{s}$   $\therefore$  به دنبال  $dp$  و  $s$  #

انتہائی بے وسعت ہے



الابداع في الرياضيات

مثال (12) :- دائرة  $M$  مماسية على المستقيم  $AB$  عند الخارج  $P$ .  $BC$  مستقيم يوازي  $MA$  تقطع الدائرة  $M$  عند  $B$  و  $D$  والدائرة  $N$  مماسية على  $BC$  عند  $C$  و  $AC$  تقاطع  $BC$  عند  $E$  من النقطة  $O$  أثبت أنه  $P$  و  $S$  منتصف  $BC$  و  $M$  و  $N$ .

$P_N = 40$  و  $P_S = 30$  "انصاف اقطار"

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{P}{P_0} \leftarrow \frac{P}{\sigma} = \frac{P_0}{\sigma_0} \leftarrow \textcircled{1}$$

#  $\therefore P \text{ غير صحيح} \rightarrow \text{ن.و.م}$

الحل :- :- ۵۲ نسبت دیا ہے

$$(1) \leftarrow \frac{p_c}{p_p} = \frac{m_c}{m_p} \therefore$$

(c)  $\leftarrow \frac{25}{5} = \frac{50}{10} \therefore 50 \parallel 50 \therefore$

$$SP = P_0 \therefore \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{P_0}{P} \leftarrow \text{C.G.T.}$$

#  $sp_p > sp \therefore \frac{sp}{sp_p} = \frac{sp}{sp} \therefore$

تمارين على منصف الزوايا والجزء المتناسب

١ في الشكل المقابل:  $\overline{AI}$  ينصف  $\Delta$ . أكمل:

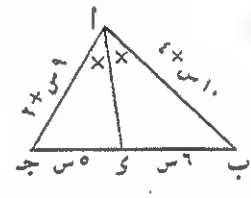
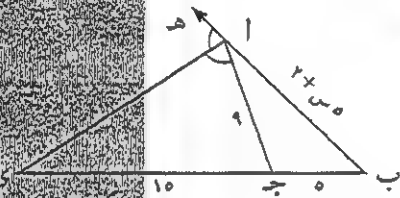
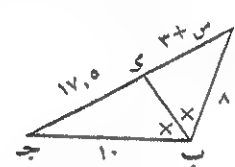
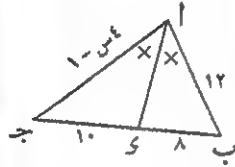
\_\_\_\_\_ =  $\frac{AI}{AB}$

\_\_\_\_\_ =  $\frac{BI}{AB}$

\_\_\_\_\_ =  $\frac{BI}{AI}$

\_\_\_\_\_ =  $\frac{AI}{BI}$

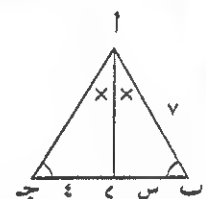
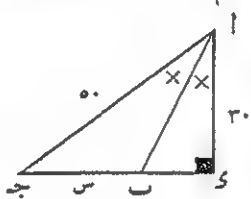
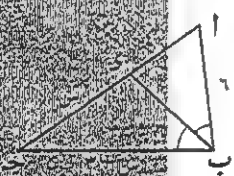
٢ في كل من الأشكال التالية، أوجد قيمة  $s$  (الاطوال مقدرة بالستيمترات)



٣ ا ب ج مثلث محيطه ٢٧ سم، رسم  $\overline{BI}$  ينصف  $\Delta$  ب و يقطع  $\overline{AC}$  في  $I$ .

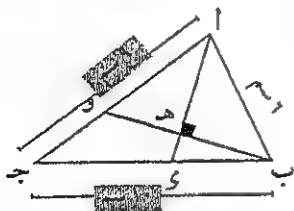
إذا كان  $AI = ٤$  سم،  $BI = ٥$  سم، أوجد طول كل من  $AB$ ،  $BC$ ،  $AC$

٤ في كل من الأشكال التالية أوجد قيمة  $s$ ، ثم أوجد محيط  $\Delta ABC$



٥ ا ب ج مثلث فيه  $AB = ٨$  سم،  $AC = ٤$  سم،  $BC = ٦$  سم، رسم  $\overline{AI}$  ينصف  $\Delta$  او يقطع  $\overline{BC}$  في  $I$  ورسم

$\overline{AH}$  ينصف  $\Delta$  الخارجة ويقطع  $\overline{BC}$  في  $H$  أوجد طول كل من  $BI$ ،  $CI$ ،  $HI$ ،  $AI$ ،  $AH$



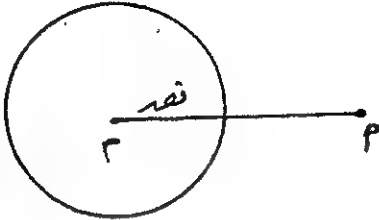
## ١٤٠ تطبيقات لتناسب في الدائرة

### أولاً :- قوة نقطة بالنسبة لدائرة :-

تعريف :- قوة النقطة  $P$  بالنسبة للدائرة  $M$  التي طول نصف قطرها  $r$  هو العدد

$$\text{الحقيق} \text{ قيم } (P) \text{ حيث } \boxed{\text{قيم } (P) = (r^2) - (MP)^2} \text{ نقطة}$$

هـ "ملاحظة هامة" :-



يملكه التميز لموقع نقطة  $P$  بالنسبة لدائرة  $M$

- فإذا كان :-
- قيم  $(P) < 0$  : فانه  $P$  تقع خارج الدائرة .
  - قيم  $(P) = 0$  : فانه  $P$  تقع على الدائرة .
  - قيم  $(P) > 0$  : فانه  $P$  تقع داخل الدائرة .

مثال ① :- حدد موقع كل من النقاط  $P, B, C$  بالنسبة للدائرة  $M$  التي طول نصف قطرها

٢٣ ثم احس بعد كل نقطة عن مركز الدائرة في الحالات التالية :-

$$(1) \text{ قيم } (P) = 9 \quad (2) \text{ قيم } (B) = \text{صفر} \quad (3) \text{ قيم } (C) = ٧ \quad (4) \text{ قيم } (P) = ٢٣$$

الحل :-

$$(1) \text{ :- قيم } (P) = 9 < ٢٣ \quad \therefore P \text{ تقع خارج الدائرة .}$$

$$\therefore \text{ قيم } (P) = (r^2) - (MP)^2 \quad \Rightarrow 9 = (٢٣)^2 - (MP)^2 \quad \Rightarrow (MP)^2 = ٥٠ \quad \Rightarrow MP = ٧ \quad \therefore P \text{ تقع خارج الدائرة .}$$

$$(2) \text{ :- قيم } (B) = 0 \quad \therefore B \text{ تقع على الدائرة .} \quad \therefore B = ٢٣$$

$$(3) \text{ :- قيم } (C) = ٧ > ٢٣ \quad \therefore C \text{ تقع داخل الدائرة .}$$

$$\therefore \text{ قيم } (C) = (r^2) - (MC)^2 \quad \Rightarrow ٧ = (٢٣)^2 - (MC)^2 \quad \Rightarrow (MC)^2 = ٩ \quad \Rightarrow MC = ٣ \quad \therefore C \text{ تقع داخل الدائرة .}$$

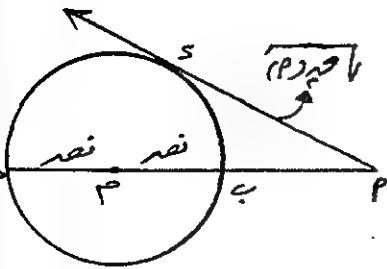
\* تدريبات \* حدد موقع كل من النقاط  $P, B, C$  بالنسبة للدائرة  $M$  التي طول نصف قطرها ٢٣

ثم احس بعد كل نقطة عن مركز الدائرة في الحالات التالية :-

$$(1) \text{ قيم } (P) = ١٥ \quad (2) \text{ قيم } (B) = \text{صفر} \quad (3) \text{ قيم } (C) = ٤$$

في "ملاحظة هامة" :-

① إذا وقعت النقطة  $P$  خارج الدائرة  $M$  فإنه :-

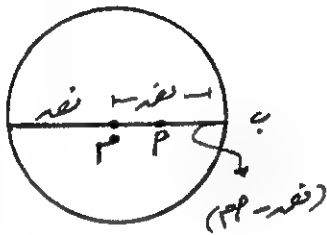


$$PM^2 - (MA)^2 = (PB)^2 - (MB)^2 \Rightarrow (PM + MA)(PM - MA) = (PB + MB)(PB - MB)$$

$$(SP)^2 = AP \times BP =$$

∴ طول المحاس المرسوم من النقطة  $P$  للدائرة  $M$  =  $\sqrt{PM^2 - (MA)^2}$

② إذا وقعت النقطة  $P$  داخل الدائرة  $M$  فإنه :-

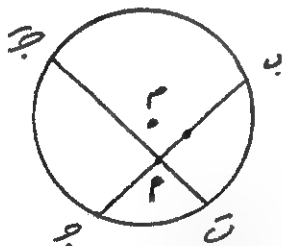


$$PM^2 - (MA)^2 = (PB)^2 - (MB)^2 \Rightarrow (PM + MA)(PM - MA) = (PB + MB)(PB - MB)$$

$$(PM + MA)(PM - MA) = (PB + MB)(PB - MB)$$

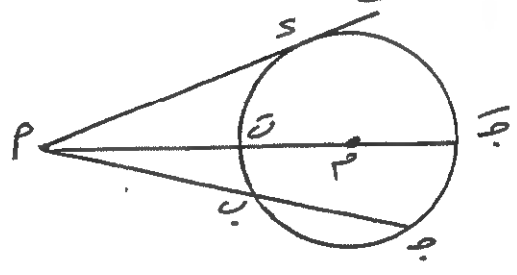
⊗ "وصيغة عامة"

(أ)  $P$  داخل الدائرة  $M$



$$PM^2 - (MA)^2 = (PB)^2 - (MB)^2 \Rightarrow (PM + MA)(PM - MA) = (PB + MB)(PB - MB)$$

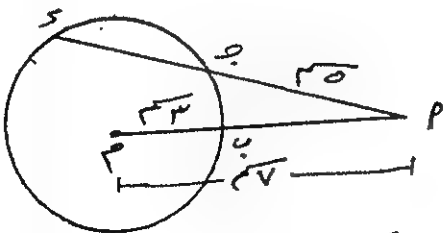
(ب)  $P$  خارج الدائرة  $M$



$$PM^2 - (MA)^2 = (PB)^2 - (MB)^2 \Rightarrow (PM + MA)(PM - MA) = (PB + MB)(PB - MB)$$

مثال ⑤ دائرة مركزها  $M$  وطول نصف قطرها  $5$  سم ،  $P$  تبعد عن مركزها  $13$  سم . رسم من  $P$

مستقيم يقطع الدائرة خارجي ،  $S$  بحيث  $P \in AS$  فإذا كان  $AP = 8$  سم أوجد طول الوتر  $AB$



$$PM^2 - (MA)^2 = (PB)^2 - (MB)^2 \Rightarrow (PM + MA)(PM - MA) = (PB + MB)(PB - MB)$$

$$13^2 - 5^2 = (PB)^2 - 5^2 \Rightarrow 169 - 25 = (PB)^2 - 25 \Rightarrow 144 = (PB)^2 \Rightarrow PB = 12$$

$$PM^2 - (MA)^2 = (PB)^2 - (MB)^2 \Rightarrow (PM + MA)(PM - MA) = (PB + MB)(PB - MB)$$

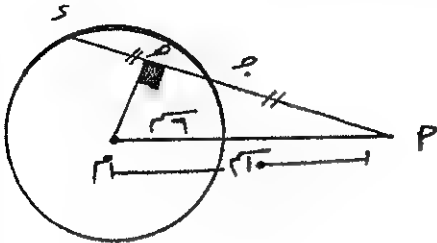
$$13^2 - 5^2 = (PB)^2 - 5^2 \Rightarrow 169 - 25 = (PB)^2 - 25 \Rightarrow 144 = (PB)^2 \Rightarrow PB = 12$$



مثال ٣ :- الدائرة  $\odot$  طول نصف قطرها  $٦$  سم ، النقطة  $P$  تبعد عن مركزها  $١٠$  سم . رسم

مستقيم يمر بالنقطة  $P$  ويقطع الدائرة من النقطتين  $S$  و  $T$  حيث  $PS = ٥$  سم .

أوجد طول  $ST$  وبعده عن مركز الدائرة .



الحل :- نعلم  $OP = ١٠$  و  $PS = ٥$  و  $OS = ٦$  .

$\therefore P$  تقع خارج الدائرة .

$$\therefore PS \cdot PT = (OS)^2 - (PM)^2 = ٦^2 - ١٠^2 = ٣٦ - ١٠٠ = -٦٤$$

$$\therefore ٦^2 = (٥)^2 \cdot PT \Rightarrow ٣٦ = ٢٥ \cdot PT \Rightarrow PT = \frac{٣٦}{٥} = ٧.٢$$

بفرض  $M$  أنه بعد الوتر  $ST$  عن مركز الدائرة  $O$  حيث  $OM \perp ST$  .

$$\text{فيكون } OM = \text{متوسط } ST \Rightarrow OM = PM = \frac{٣٦}{٥} = ٧.٢$$

$$\therefore OM = ٧.٢ = ٧.٢ + ١٠ = ١٧.٢$$

$$\text{من } \triangle OPM \text{ القائم في } M \Rightarrow (OM)^2 = (OP)^2 - (PM)^2$$

$$\Rightarrow (١٧.٢)^2 = ١٠٠ - (٧.٢)^2 \Rightarrow ٢٩٦ = ١٠٠ - ٥١.٨٤ \Rightarrow ٢٤٤.١٦ = ٠$$

\* \* \* تدريب \* الدائرة  $\odot$  طول نصف قطرها  $٨$  سم . النقطة  $P$  تبعد عن مركزها  $١٢$  سم .

رسم مستقيم يمر بالنقطة  $P$  ويقطع الدائرة من النقطتين  $S$  و  $T$  حيث  $PS = ٥$  سم .

أوجد طول الوتر  $ST$  وبعده عن النقطة  $P$  .

مثال ٤ :- دائرة  $\odot$  ، مركزها  $O$  ، نصف قطرها  $٦$  سم . النقطة  $P$  تبعد عن مركزها  $١٠$  سم . رسم

مستقيم يمر بالنقطة  $P$  ويقطع الدائرة من النقطتين  $S$  و  $T$  حيث  $PS = ٥$  سم .

أوجد طول الوتر  $ST$  وبعده عن مركز الدائرة .

$$(١) \text{ اجبت أنه } PS \cdot PT = (OS)^2 - (PM)^2 = ٦^2 - ١٠^2 = ٣٦ - ١٠٠ = -٦٤$$



ثانياً: القاطع والمماس وميَّاسات الزوايا :-

تذكير :-

① إذا تقاطع قاطعان داخل دائرة فإحدى ميَّاس زاوية تقاطعها يساوي نصف مجموع ميَّاس القوس المقابل لهذه الزاوية والقوس المقابل للزاوية التي تقاطعها بالرأس

في الشكل المقابل :-

$$\overrightarrow{PA} \cap \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SD}$$

$$\text{فإنه } \overrightarrow{PA} \cap \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SD} = \frac{1}{2} [\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}]$$

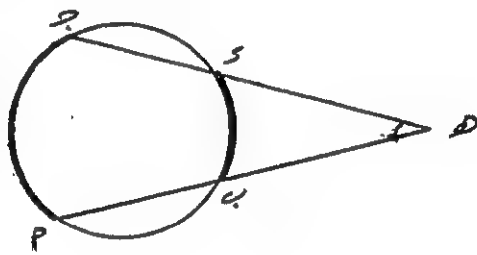
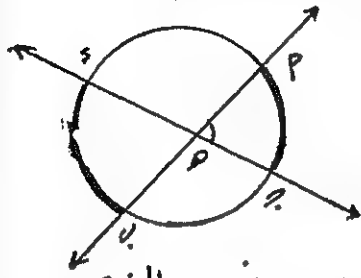
② إذا تقاطع قاطعان داخل دائرة فإحدى ميَّاس زاوية تقاطعها يساوي نصف الفرق

الموجب بين ميَّاس القوسين المقابلين لسطح

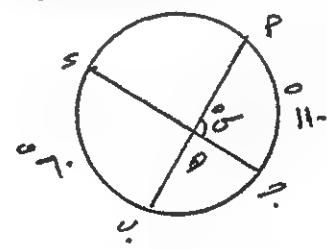
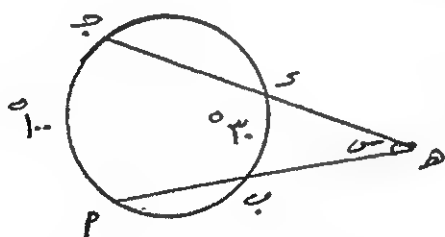
في الشكل المقابل :-

$$\overrightarrow{PA} \cap \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SD}$$

$$\text{فإنه } \overrightarrow{PA} \cap \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SD} = \frac{1}{2} [\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PD}]$$



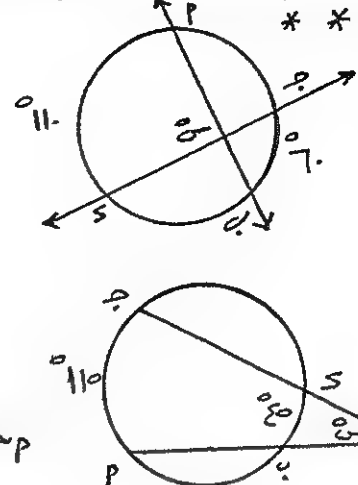
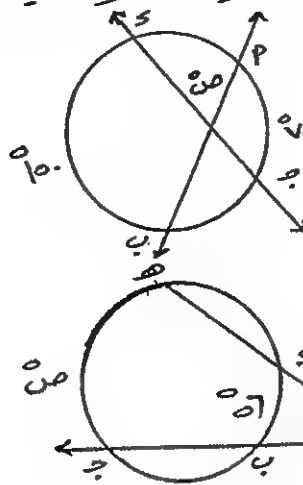
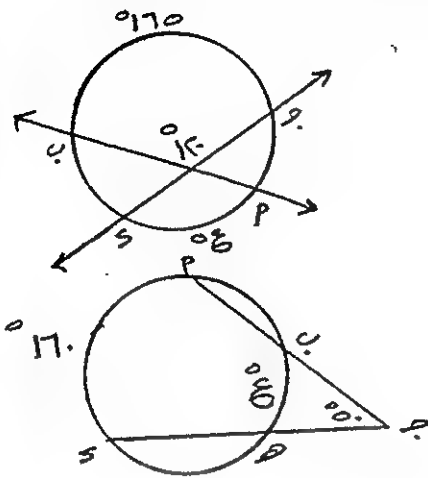
مثال ② :- في الأشكال الآتية . أوجد قيمة س :-



الحل :- (1)  $170 = 110 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} [110 + 60] = \frac{1}{2} [\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{QD}]$

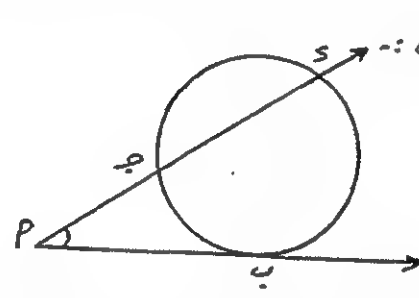
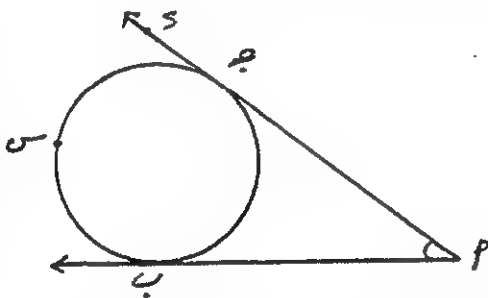
(2)  $170 = 110 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} [110 - 60] = \frac{1}{2} [\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{QD}]$

\* تدرسي \* في كل من الأشكال الآتية . أو جد قيمة الزوايا المستعمرة في القياس .



تمرين مشهور :-

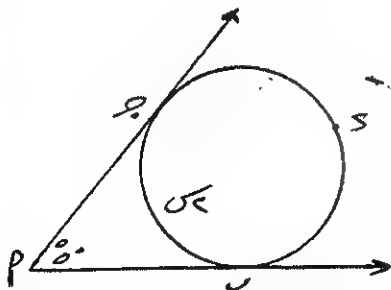
القاطع والمماس (أو المماس)، لدائرة المتقاطعة خارج الدائرة يكون قياس زاوية تقاطعها مساوياً لنصف الفرق المربع بين قياس القوسين المقابلين لها.



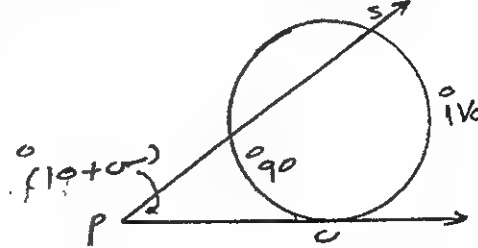
$$\angle P = \frac{1}{2} [\text{قوس } (بج) - \text{قوس } (أب)]$$

$$\angle P = \frac{1}{2} [\text{قوس } (بج) - \text{قوس } (أب)]$$

مثال ٦ :- من الأشكال الآتية أو جد قيمة س .



(٢)



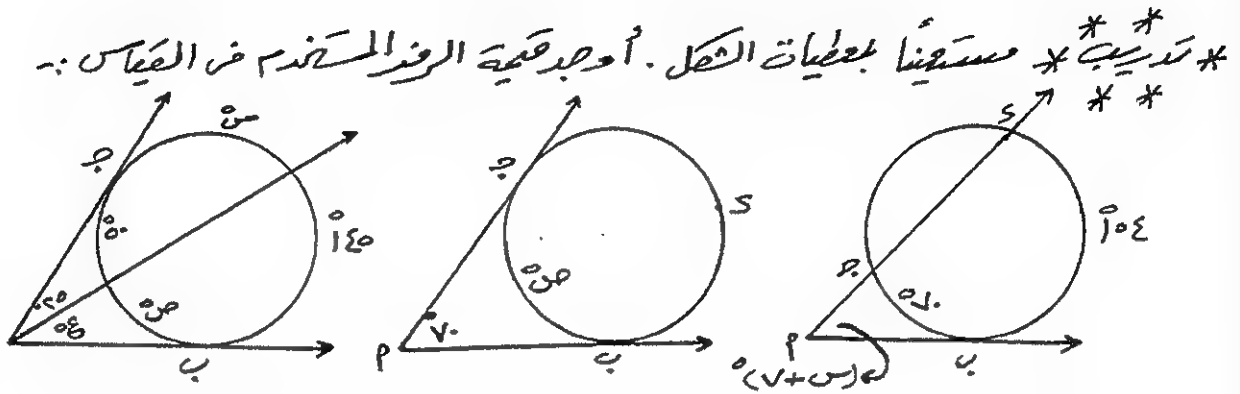
(١)

الحل :- (١)  $\angle P = \frac{1}{2} [90 - 170] = 10 + S$   $\Rightarrow 10 + S = 10 + S$   $\Rightarrow S = 0$

$$(٢) \quad \frac{1}{2} = 0.5 \quad \Leftrightarrow \quad [٣٦٠ - (٣٦٠ - ٣٦)] \cdot \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{1}{2} = 0.5 \quad \Leftrightarrow \quad [٣٦٠ - ٣٦] \cdot \frac{1}{2} = 0.5$$

$$٣٦٠ - ٣٦ = ٣٢٤ \quad \Leftrightarrow \quad ٣٢٤ \cdot \frac{1}{2} = ١٦٢ \quad \Leftrightarrow \quad ٣٢٤ = ٢ \cdot ١٦٢$$



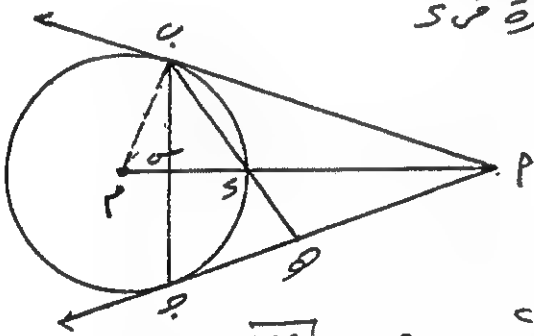
مثال ٥ :- في الشكل المقابل :- دائرة طول نصف قطرها ٩ سم

نقطتي P و Q على سطح عند B. P م يقطع الدائرة في S

نقطتي P و Q على سطح عند B. P م يقطع الدائرة في S

إذا كانه في (P) = ١٤٤. أوجد :-

(١) طول P B ، (٢) طول P S



الحل :-  $\therefore$  في (P) = ١٤٤  $\Leftrightarrow$  (P) = ١٤٤  $\Leftrightarrow$  (P) = ١٤٤  $\Leftrightarrow$  (P) = ١٤٤

نصل B بم نصف قطر.  $\therefore$  P B عماس  $\therefore$  P B  $\perp$  B P

$\therefore$  P B عماس  $\therefore$  P B  $\perp$  B P

في P B الم قائم في B  $\therefore$  (P) = (P) + (P) = (P) + (P) = (P)

$\therefore$  P B = ١٥ = ١٥

في P B الم قائم في B  $\therefore$  B P  $\perp$  P S  $\therefore$  (P) = (P) + (P) = (P) + (P) = (P)

$$\# \quad ١٥ \times P = (١٤) \Leftrightarrow \frac{١٤٤}{١٥} = P \Leftrightarrow ٩.٦ = P$$

تمارين على "تطبيقات التناسب في الدائرة"

- ١٦ حدد موقع كل من النقط التالية بالنسبة إلى الدائرة م، والتي طول نصف قطرها ١٠ سم. حيث بعد كل نقطة عن مركز الدائرة.
- ١٧ و م (أ) = ٣٦ م (ب) = ٩٦ م (ج) = ١٠٨ م (د) = ١٤٤ م

- ١٨ أوجد قوة النقطة المعطاة بالنسبة إلى الدائرة م، والتي طول نصف قطرها م:

١ النقطة أ حيث  $ام = ١٢$  سم ،  $مو = ٩$  سم

٢ النقطة ب حيث  $بم = ٨$  سم ،  $بو = ١٥$  سم

٣ النقطة ج حيث  $جم = ٧$  سم ،  $جو = ٧$  سم

٤ النقطة د حيث  $دم = ١٧$  سم ،  $دو = ٤$  سم

- ١٩ إذا كان بعد نقطة عن مركز دائرة يساوي ٢٥ سم وقوة هذه النقطة بالنسبة إلى الدائرة م، أوجد طول نصف قطر هذه الدائرة.

- ٢٠ الدائرة م طول نصف قطرها ٢٠ سم. أ نقطة تبعد عن مركز الدائرة مسافة ١٦ سم، رسم الوتر  $أب$  حيث  $أ \in \overline{بج}$  ،  $أب = ٢$  جـ. احسب طول الوتر  $بج$ .

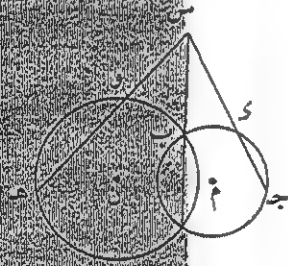
- ٢١ في الشكل المقابل: الدائرتان م، ن متقاطعتان في أ، ب

حيث  $\overline{أب} \cap \overline{ج د} \cap \overline{ه و} = \{س\}$  ،  $س د = ٢$  جـ ،  $ه و = ١٠$  سم ،  $و ن (س) = ١٤٤$ .

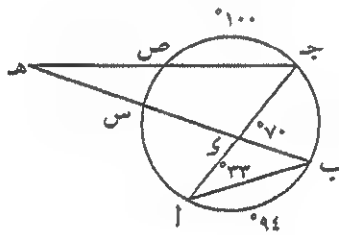
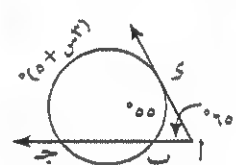
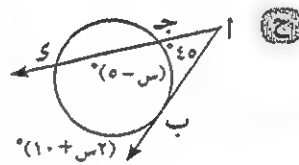
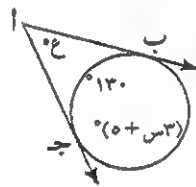
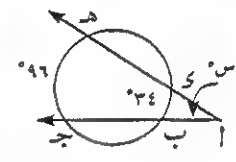
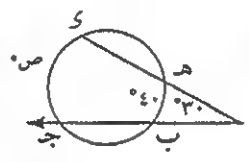
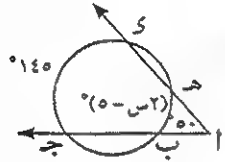
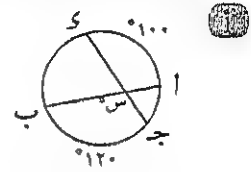
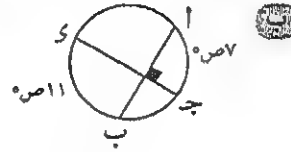
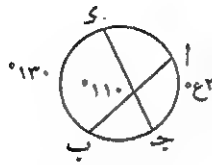
- ٢٢ أثبت أن  $\overline{أب}$  محور أساسي للدائرتين م، ن.

٢٣ أوجد طول كل من  $\overline{سج}$  ،  $\overline{سو}$

- ٢٤ أثبت أن الشكل  $ج د و ه$  رباعي دائري.



١٦ مستعينًا بمعطيات الشكل، أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس.

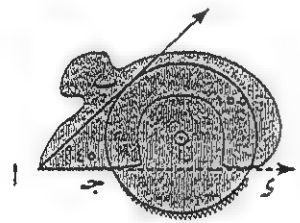


١٧ في الشكل المقابل: و (أ ب أ ج) = 23°، و (أ ب د ج) = 70°،  
و (أ ب) = 94°، و (ج ص) = 100° أوجد قياس كل من:

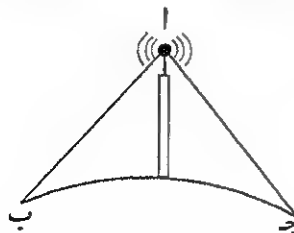
س ص

أ س

أ ب ه ج



١٨ الربط مع الصناعة: منشار دائري لقطع الخشب طول نصف قطر  
دائرته 10 سم. يدور داخل حافظة حماية، فإذا كان و (أ ب أ د) =  
45°، و (ب د) = 100° أوجد طول قوس قرص المنشار خارج حافظة  
الحماية.



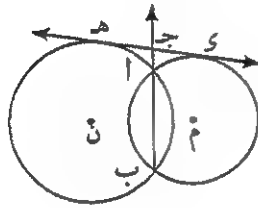
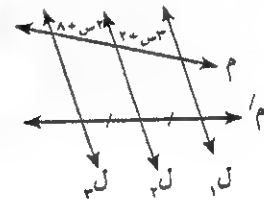
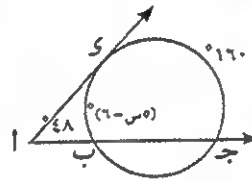
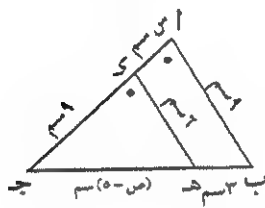
١٩ اتصالات: تتبع الإشارات التي تصدر عن برج الاتصالات في مسارها  
شعاعًا، نقطة بدايته على قمة البرج، ويكون مماسًا لسطح الأرض،  
كما في الشكل المقابل. حدد قياس القوس المحصور بالماسين  
بفرض أن البرج يقع على مستوى سطح البحر، و (أ ب أ ج) = 80°

## تمارين عامة

١ أكمل العبارات التالية:

- ١ المنصفان الداخلي والخارجي لزاوية واحدة .....
- ٢ منصفات زوايا المثلث تتقاطع في .....
- ٣ إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث، ويقطع الضلعين الآخرين فإنه .....
- ٤ المنصف الخارجي لزاوية رأس المثلث المتساوي الساقين ..... قاعدة المثلث.
- ٥ إذا كانت قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة م كمية سالبة، فإن نقطة اتقع .....

٦ مستعيناً بمعطيات الشكل، أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس.



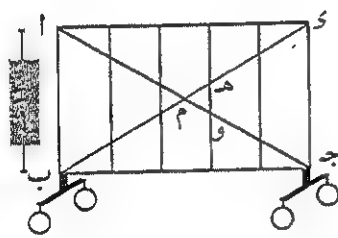
٧ دائرتان م، ن متقاطعتان في أ، ب.

هـ د مماس مشترك للدائرتين م، ن عند د، هـ على الترتيب،

$$\overline{AB} \cap \overline{DE} = \{ج\}$$

٨ أثبت أن: ب جـ محور أساسي للدائرتين.

٩ إذا كان أ ب = ٩ سم، و(ج) = ٣٦، أوجد طول جـ أ، جـ د

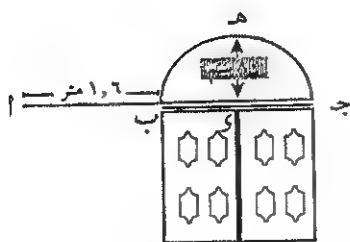


١٠ يبين الشكل المقابل أحد الحواجز المرورية أ ب جـ د على شكل

مستطيل ومكون من متوازية ومتطابقة، وعلى أبعاد متساوية،

ومثبت به دعامتان أ جـ، ب د، تقطعان أحد القضبان الرأسية في

و، هـ على الترتيب فإذا كان أ ب = ١٢٠ سم أوجد طول هـ د.



١١ هندسة معمارية: من نقطة أ والتي تبعد ١,٦ مترًا عن قاعدة قنطرة

تعلو باب منزل، وجد أن قوة النقطة أ بالنسبة لدائرة قوس القنطرة

يساوي ٦,٤ متر مربع.

١٢ أوجد طول قاعدة القنطرة (ب جـ).

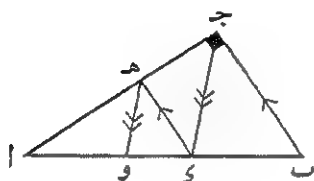
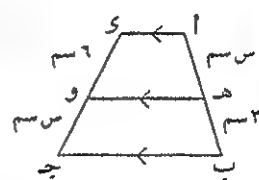
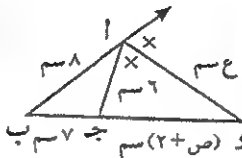
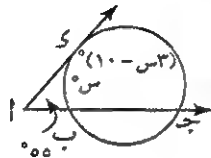
١٣ إذا كان ارتفاع القنطرة يساوي ٨٠ سم، فأوجد قوة النقطة د

بالنسبة لدائرة القنطرة وطول نصف قطرها.



## اختبار الوحدة

١) مستخدماً معطيات الشكل، أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس.



٢) في الشكل المقابل:  $\Delta$  أ ب ج قائمة، ب ج // د هـ

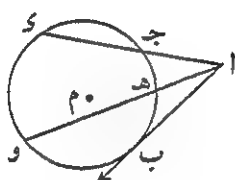
ج د // هـ و. أثبت أن:

$$او \times اب = ا هـ + (هـ د)^2$$

٣) أ ب ج مثلث، ن نقطة داخل المثلث. نصفت الزوايا أ ب، ب ن ج، ج ن أ

بمنصفات لاقط أ ب، ب ج، ج أ في د، هـ، و على الترتيب.

$$اثبت أن: \frac{اي}{وب} \times \frac{ب هـ}{هـ ج} \times \frac{ج و}{وا} = 1$$



٤) انقطة خارج الدائرة م، أ ب مماس للدائرة عند ب.

رسم أ ج، أ هـ يقطعان الدائرة في ج، د، هـ، و على الترتيب،

$$اج = ٤سم، هـ و = ٩سم.$$

١) إذا كان م (أ) أوجد طول كل من أ ب، أ هـ، ج د

٢) إذا كانت س  $\exists$  ج د حيث ج س = ٢سم أوجد م (س)، م (د).

٥) أ و متوسط في  $\Delta$  ا ب ج، ج س ينصف أ ب ويقطع أ ب في س، د ص ينصف أ د ج و يقطع

أ ج في ص.

١) أثبت أن: س ص // ب ج

٢) إذا رسم د ع  $\perp$  س ص ويقطعه في ع، وكان س ع = ٩سم، ع ص = ١٦سم

أوجد طول كل من: د س، د ص.

أسئلة الاختيار من متعدد

اختبار تراكمي

١٠ إذا كان  $\frac{3}{4} = \frac{9}{x}$  فإن س تساوي:

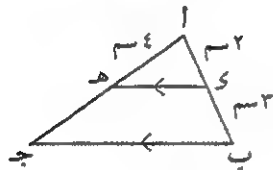
- ١٢ ١٦ ٢٧ ٨١

١١ جذرا المعادلة  $x^2 + 2x - 20 = 0$  صفر هما:

- ١٠، ٢ ٤، ٥ ٤، ٤ ٥، ٤

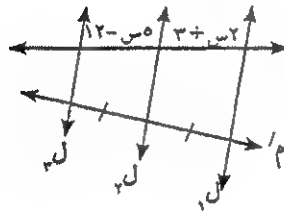
١٢ إذا كان  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$  فإن  $\angle A$  يساوي:

- ٣٠ سم ٦٠ سم ٤٠ سم ١٠ سم



١٣ إذا كان المستقيمات  $l, l, l$  متوازية، يقطعها المستقيمان  $m, m$  والأطوال مقدرة بالسنتيمترات فإن س تساوي:

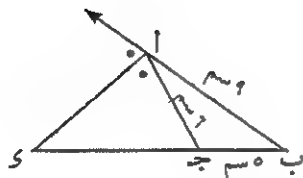
- ٥ ٣ ٢ ٧



١٤ في الشكل المقابل  $\overline{AO}$  ينصف الزاوية الخارجة

عند  $A$  فإن طول  $\overline{AO}$  يساوي:

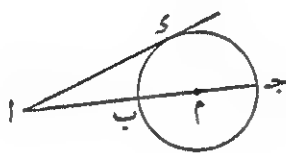
- ٥ سم ١٢ سم ١٠ سم ١٨ سم



١٥ الدائرة  $m$  طول نصف قطرها ٥ سم،  $\overline{AO}$  مماس للدائرة عند  $D$ ،

$AD = 12$  سم فإن طول  $\overline{AO}$  يساوي:

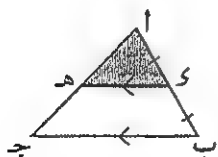
- ٧ سم ١٥ سم ١٢ سم ١٨ سم



١٦ إذا كانت مساحة سطح  $\triangle ABC = 16$  سم<sup>2</sup>

فإن مساحة سطح المثلث  $ABD =$  \_\_\_\_\_ سم<sup>2</sup>.

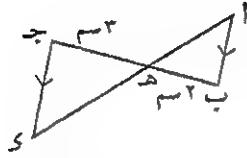
- ١٦ ٣٢ ٦٤ ١٢٨



## اختبار تراكمي

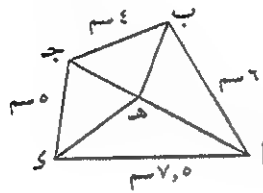
الأسئلة ذات الإجابات القصيرة:

٨. في الشكل المقابل:



$\overline{أب} // \overline{ج د}$ ،  $\widehat{ب ه د} = \widehat{سم ٢}$ ،  $\widehat{ج ه د} = \widehat{سم ٣}$ ،  
أى = ١٠ سم. أوجد طول  $\overline{ه د}$

٩. في الشكل المقابل:  $\overline{ب ه}$  ينصف  $\angle ب$ ،



ويقطع  $\overline{أ ج}$  في  $\overline{ه د}$   $\widehat{ا ب} = \widehat{سم ٦}$ ،  $\widehat{ج د} = \widehat{سم ٥}$ ،  $ا = ٧,٥$  سم  
 $ب ج = ٤$  سم. أثبت أن  $\overline{و ه}$  ينصف  $\angle ا$  جـ

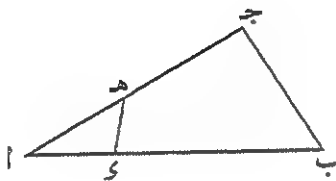
١٠. في الشكل المقابل:



$\overline{أ ب}$ ،  $\overline{ج د}$  وتران في الدائرة،  $\overline{أ ب} \cap \overline{ج د} = \{ه\}$   
أثبت أن  $\triangle ا ه ج \sim \triangle د ه ب$

التمارين ذات الإجابات الطويلة

١١. في الشكل المقابل:  $\overline{أ ب}$  جـ مثلث فيه  $\widehat{ا ب} = ٢$   $ب ج = ١٢$  سم،



$ا ج = ٩$  سم،  $و \exists \overline{أ ب}$  حيث  $اى = \widehat{سم ٣}$ ،

$ه د \exists \overline{أ ج}$  حيث  $ا ه = \widehat{سم ٤}$ ،

أثبت أن  $\triangle ا ب ج \sim \triangle ا ه د$

ثم أوجد طول  $\overline{ه د}$ .

١٢.  $\overline{أ ب}$  جـ مثلث،  $و \exists \overline{ب ج}$ ،  $و \exists \overline{ب ج}$ ، رسم  $\overline{و ه}$  فقطع  $\overline{أ ج}$ ،  $\overline{أ ب}$  في  $ه$ ، وعلى الترتيب  
فإذا كان الشكل  $ب ج ه$  ورباعياً دائرياً أثبت أن  $\frac{ب ك}{و ه} = \frac{و ب}{ج ه}$ .

مكتبة وسام

شربين، شارع حسني مبارك، خلف الثانوية بنات  
01004423597 - 3943035

أ / جميل غالي السيد

(١٧٨)

الفصل الدراسي الأول

اختبارات عامة

من الكتاب المدرسي علي

الحجبر

وحساب المثلثات

والهندسة

## اختبارات عامة

(الجبر وحساب المثلثات)

الاختبار الأول

أولاً: أكمل ما يأتى

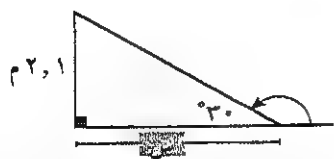
- ١) إذا كان  $s = 1$  هي أحد جذرى المعادلة  $s^2 - 1s - 2 = 0$  فإن  $1 =$  .....
- ٢) إشارة الدالة  $d$  حيث  $d(s) = s^2 + 3$  تكون .....
- ٣) المعادلة التربيعية فى مجموعة الأعداد المركبة التى جذراها  $-t$ ،  $t$  هى .....
- ٤) مدى الدالة  $d$  حيث  $d(\theta) = 3$  جا  $\theta$  هو .....
- ٥) أصغر زاوية موجبة مكافئة للزاوية التى قياسها  $(-84^\circ)$  قياسها ..... وتقع فى الربع .....

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

- ١) أثبت أن جذرى المعادلة  $s^2 - 5s + 3 = 0$  حقيقيان مختلفان، ثم أوجد مجموعة الحل فى ح مقرباً الناتج لرقم عشرى واحد. ....
- ٢) أوجد فى أبسط صورة قيمة المقدار: جا  $(-30^\circ)$  جتا  $20^\circ$  ظل  $20^\circ$  ظل  $70^\circ$  .....  
 ٣) فى المعادلة  $(5-1)s^2 + (10-1)s - 5 = 0$  أوجد قيمة  $A$  فى الحالات الآتية:  
 أولاً: إذا كان مجموع جذرى المعادلة  $= 4$  .....  
 ثانياً: إذا كان أحد جذرى المعادلة هو المعكوس الضربى للجذر الآخر. ....  
 ٤) ابحث إشارة الدالة  $d$  حيث  $d(s) = s^2 + 2s - 10$  مع توضيح ذلك على خط الأعداد. ....

- ٢) أوجد مجموعة حل المتباينة:  $5s^2 + 12s \leq 44$  .....
- ٣) إذا كان جا  $\theta = \frac{2}{5}$  حيث  $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ، أوجد قيمة: جتا  $(\theta - 270^\circ)$ ، ظل  $(\theta + 180^\circ)$  .....

- ٤) ضع العدد المركب الآتى فى أبسط صورة  $(26 - 4t) - (20 - 9t)$  حيث  $t^2 = 1$  .....
- ٥) الربط بالرياضة: يركل لاعب كرة القدم الكرة نحو الهدف من مسافة  $s$  متراً عن حارس المرمى، فيقفز الحارس ويمسك الكرة على ارتفاع  $2,1$  متراً عن سطح الأرض فإذا كان مسار الكرة يميل بزاوية قياسها  $30^\circ$  مع الأفقى. فأوجد لأقرب رقم عشرى واحد المسافة بين اللاعب وحارس المرمى عندما يركل اللاعب الكرة.



الاختبار الثاني

(الجبر وحساب المثلثات)

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) أبسط صورة للعدد التخيلي  $3^{\sqrt{2}}$  هو:   
 أ)  $1 - \sqrt{2}$  ب)  $1 + \sqrt{2}$  ج)  $1 - \sqrt{3}$  د)  $1 + \sqrt{3}$

٢) الدالة  $f(x) = [x, 4, -]$  ح حيث  $D(f) = 2 - 6$  س تكون إشارتها موجبة في الفترة:   
 أ)  $[2, 4]$  ب)  $[4, 6]$  ج)  $[2, 6]$  د)  $[6, 4]$

٣) إذا كان جذرا المعادلة  $x^2 - 12x + 4 = 0$  متساويين فإن ج تساوى:   
 أ)  $3$  ب)  $4$  ج)  $9$  د)  $16$

٤) ظل  $(\frac{\pi}{4} -)$  تساوى:   
 أ)  $3\sqrt{2}$  ب)  $\frac{1}{3\sqrt{2}}$  ج)  $\frac{1}{3\sqrt{2}}$  د)  $3\sqrt{2}$

٥) القياس الدائري لزاوية مركزية تحصر قوساً طوله  $2$  سم من دائرة طول قطرها  $4$  سم هو:   
 أ)  $(\frac{\pi}{2})^\circ$  ب)  $(\frac{\pi}{3})^\circ$  ج)  $(\frac{\pi}{4})^\circ$  د)  $(\frac{\pi}{6})^\circ$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

١) بين نوع جذري المعادلة  $x^2 + 9 = 6x$ ، ثم أوجد مجموعة الحل.   
 أ) إذا كان:  $7 < x < 20$  حيث  $\frac{\pi}{4} > 1 > \pi$ . فأوجد القيمة العددية للمقدار:  $\text{ظا}(1 + \pi) - \text{ظنا}(1 - \frac{\pi}{4})$

٢) أوجد قيمتي  $a$ ،  $b$  الحقيقيتين اللتين تحققان المعادلة:  $(3 + a) - (b - 1) = 9 - 7 = 2$  حيث  $1 = 2$

٣) حول قياس كل من الزوايا المكتوبة بالدرجات إلى راديان والمكتوبة بالراديان إلى درجات   
 أولاً:  $210^\circ$  ثانياً:  $\frac{\pi}{8}$

٤) ابحث إشارة الدالة  $f(x) = x^2 - 3x + 4$  مع توضيح ذلك على خط الأعداد الحقيقية   
 إذا كانت الزاوية  $\theta$  مرسومة في الوضع القياسي، حيث يمر ضلعها النهائي بالنقطة  $(4, -3)$    
 فأوجد  $\text{جا}\theta$ ،  $\text{ظنا}\theta$ .

٥) إذا كان  $(2 + \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2}) + (4 - \sqrt{2}) > 0$    
 أولاً: اكتب المتباينة التربيعية في أبسط صورة. ثانياً: أوجد مجموعة حل المتباينة.

٦) إذا كان  $\frac{2}{m}, \frac{2}{n}$  هما جذرا المعادلة  $x^2 - 6x + 4 = 0$  فأوجد المعادلة التي جذراها  $(m + n)$ ،  $l$  م.

(الجبر وحساب المثلثات)

الاختبار الثالث

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

١) إذا كان أحد جذري المعادلة  $أس^٢ + ٢س + ٥ = ٥$  معكوساً ضريبياً للجذر الآخر فإن  $أ$  تساوى:   
 (أ) ٥- (ب) ٢- (ج) ٢ (د) ٥

٢) إشارة الدالة  $د$  حيث  $د(س) = ٢ - ٦س$  تكون موجبة إذا كانت:   
 (أ)  $س < ٣$  (ب)  $س \leq ٣$  (ج)  $س > ٣$  (د)  $س \geq ٣$

٣) المعادلة التربيعية التي جذراها  $١ + ت$ ،  $١ - ت$  حيث  $ت^٢ = ١ - هـ$ :   
 (أ)  $س^٢ + ٢س + ٥ = ٥$  (ب)  $س^٢ - ٢س + ٥ = ٥$  (ج)  $س^٢ + ٢س - ٥ = ٥$  (د)  $س^٢ - ٢س - ٥ = ٥$

٤) إذا كانت  $\theta$  زاوية مرسومة في الوضع القياسي بحيث جتا  $\theta < ٥$ ، في أى ربع يقع ضلع النهاية للزاوية  $\theta$ :   
 (أ) الأول (ب) الأول أو الثاني (ج) الأول أو الثالث (د) الأول أو الرابع

٥) إذا كانت  $٢$  جتا  $١ = -٣٦$  فإن أقل زاوية موجبة تحقق هذه الدالة المثلثية هي:   
 (أ)  $٤٥^\circ$  (ب)  $١٣٥^\circ$  (ج)  $٢٢٥^\circ$  (د)  $٣١٥^\circ$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

١) إذا كان  $ل$ ،  $م$  جذري المعادلة  $س(٢س + ٣) = ٥$  فأوجد المعادلة التي جذراها  $ل + ١$ ،  $م + ١$ .

٢) زاوية مركزية قياسها  $٦٠^\circ$  وتقابل قوساً طوله  $\frac{\pi}{٣}$  سم، احسب طول نصف قطر دائرتها.

٣) ضع العدد  $\frac{٢-٣ت}{٢+٣ت}$  في صورة عدد مركب. حيث  $ت^٢ = ١ - ١$ .   
 إذا كان  $٤$  جا  $١ - ٣ = ٥$  أوجد  $١$  حيث  $١ \in [٥]$ ،  $٥$ ،  $\frac{\pi}{٣}$ .

٤) إذا كانت  $د: ح \rightarrow ح$  حيث  $د(س) = -٥س + ٨س - ١٥$    
 أولاً: ارسم منحنى الدالة في الفترة  $[١، ٧]$  ثانياً: عين من الرسم إشارة هذه الدالة.

٥) إذا كان  $س = ٢ + ٣ت$ ،  $ص = \frac{٢-٤ت}{٢-١ت}$  فأوجد  $س + ص$  في صورة عدد مركب.

٦) أوجد مجموعة حل المتباينة  $س^٢ + ٣س - ٤ \geq ٥$ .

٧) إذا كان  $ظا ب = \frac{٢}{٤}$  حيث  $١٨٠^\circ < ب < ٢٧٠^\circ$  فأوجد قيمة: جتا  $(٣٦٠^\circ - ب)$  - جتا  $(٩٠^\circ - ب)$

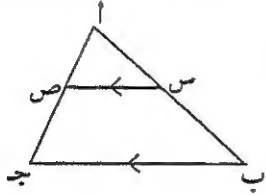
الاختبار الرابع

(الهندسة)

أولاً: أكمل

١) إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية، فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون .....

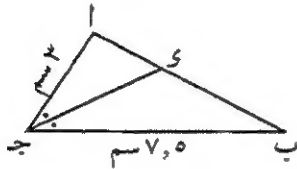
٢) النسبة بين مساحتي سطحي مثلثين متشابهين هي ٣ : ٥، إذا كانت مساحة سطح المثلث الأول ٣٦ سم<sup>٢</sup> فإن مساحة سطح المثلث الثاني تساوي .....



٣) في الشكل المقابل: إذا كان  $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ ،  $AN : BN = ٣ : ٨$  فإن:

١)  $AM : MB =$  : .....

٢) محيط  $\triangle AMN$  : محيط  $\triangle ABC =$  : .....

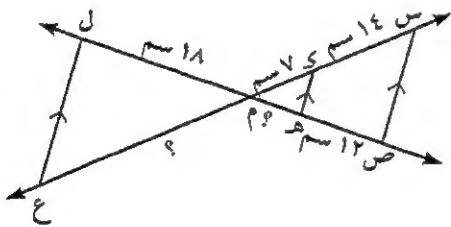


٤) في الشكل المقابل: إذا كان  $\overline{MN}$  ينصف  $\angle A$ ،

أجـ = ٣ سم، بـ جـ = ٧,٥ سم، فإن  $AN : BN =$  : .....

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية

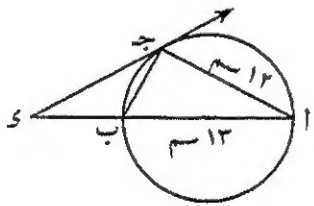
١) أوجد قوة النقطة أ بالنسبة إلى الدائرة م التي طول نصف قطرها ٣ سم،  $AM = ٤$  سم.  
٢) رسم مهندس معماري مخططاً لقطعة أرض مستطيلة الشكل، طولها ضعف عرضها، ومساحتها ٢٠٠ متر<sup>٢</sup> بمقياس رسم ١ : ٢٠٠، أوجد طول قطعة الأرض في المخطط.



٣) في الشكل المقابل:  $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ ،  $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$ ، أوجد:

أولاً: طول  $\overline{MN}$

ثانياً: طول  $\overline{MN}$



٤) في الشكل المقابل:  $\overline{AB}$  قطر في الدائرة،

جـ د مماس للدائرة عند جـ، أجـ = ١٢ سم، اب = ١٣ سم. أثبت أن:

١)  $\triangle ADB \sim \triangle ACD$

٢) أوجد طول جـ د لأقرب سم

٣) أوجد مساحة  $\triangle ABC$

٥) أب جـ مثلث قائم الزاوية في أ، فيه أب = ٢٠ سم، أجـ = ١٥ سم،  $\exists$  بـ جـ بحيث كان بـ د = ١٠ سم، رسم  $\overline{AD} \perp \overline{BC}$  ويقطع بـ جـ في هـ، ومن د رسم  $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$  ويقطع  $\overline{AD}$  في و. أثبت أن جـ و ينصف  $\angle C$



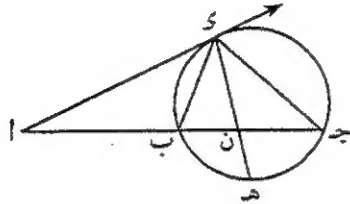
(الهندسة)

الاختبار الخامس

أولاً: أكمل:

١) النسبة بين مساحتي سطحي مثلثين متشابهين كالنسبة بين .....

٢) يتشابه المضلعان إذا كان ..... ، .....



٣) في الشكل المقابل أكمل:

١)  $(\text{أ})^2 = \dots$

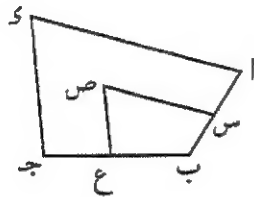
٢)  $\text{ن} \times \text{هـ} = \dots$

٣)  $\Delta \text{أى جـ} \sim \Delta \dots$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

١) أوجد قوة النقطة ب بالنسبة إلى الدائرة م، التي طول نصف قطرها ٨ سم، ب م = ٥ سم

٢) في الشكل المقابل:



أولاً: إذا كان المضلع أ ب ج د ~ المضلع س ب ع ص  
فأثبت أن:  $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{أ د}}$ .

ثانياً: إذا كان محيط المضلع أ ب ج د = ١٤ سم،

محيط المضلع س ب ع ص = ١٠ سم،

طول  $\overline{\text{س ب}} = ٢$  سم، فأوجد طول  $\overline{\text{أ ب}}$

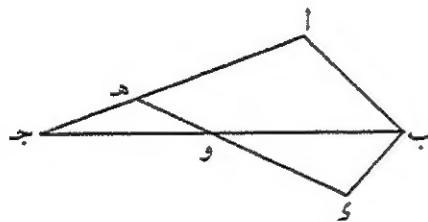
٣) في الشكل المقابل: أ ب = ٦ سم، ب ج = ١٢ سم،

ج د = ٨ سم، و ج هـ = ٣ سم، ب هـ = ٥ سم، د و = ٦ سم.

أثبت أن:

١)  $\Delta \text{أ ب جـ} \sim \Delta \text{د ب و}$

٢)  $\Delta \text{هـ د و} \sim \Delta \text{س ب و}$



٤) س ص ع مثلث، نصف زاوية ص بمنصف قطع بين ع في م، ثم رسم  $\overline{\text{ن م}} \parallel \overline{\text{ص ع}}$  فقطع س ص في ن.

أثبت أن:  $\frac{\text{س ص}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{س ن}}{\text{ص ن}}$ ، وإذا كان س ص = ٦ سم، ص ع = ٤ سم، فأوجد طول س ن.

٥) أ ب ج د مثلث قائم الزاوية في أ. رسم  $\overline{\text{أى}} \perp \overline{\text{ب ج}}$  فقطعها في ي.

رسم المثلثان المتساوي الأضلاع أ ب هـ، ج د و خارج المثلث أ ب ج

أثبت أن:

١) الشكل الرباعي أ ب هـ د ~ الشكل الرباعي ج د و أ.

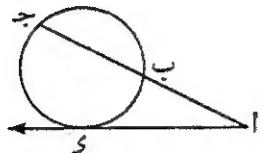
٢)  $\frac{\text{مساحة سطح الشكل أ ب هـ د}}{\text{مساحة سطح الشكل ج د و أ}} = \frac{\text{بى}}{\text{جى}}$

(الهندسة)

الاختبار السادس

أولاً: أكمل:

- ١) إذا رُسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث، و يقطع الضلعين الآخرين فإنه .....  
 ٢) في الشكل المقابل: إذا كان  $\overline{آى}$  مماس للدائرة عند  $ى$ ، فإن:

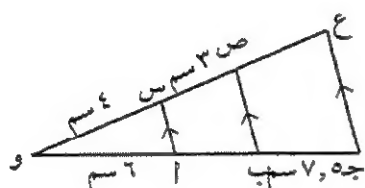


- أولاً:  $ا ب \times ج د =$  .....  
 ثانياً: إذا كان  $ا ج = ٨$  سم،  $ا ب = ٢$  سم، فإن  $ا ى =$  .....  
 ثالثاً: إذا كان  $ا ب = ب ج$ ،  $ا ى = ٣٦$  سم، فإن،  $ا ج =$  .....

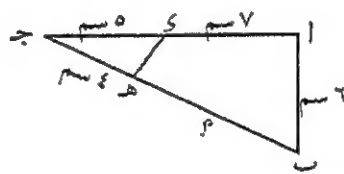
ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

- ١) إذا كانت النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين تساوى ١٦ : ٤٩، فما النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما؟ وما النسبة بين محيطيهما؟

- ٢) دائرتان متقاطعتان في  $ا$ ،  $ب$  رسم مماس مشترك يماسهما في  $س$ ،  $ص$ .  
 إذا كان  $ا ب \cap س ص = {ج}$  أثبت أن  $ج د$  منتصف  $س ص$ .

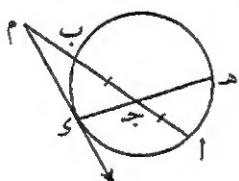


- ٢) في الشكل المقابل:  $ا س // ب ص // ج ع$ ،  
 و  $ا = ٦$  سم،  $و س = ٤$  سم،  $س ص = ٣$  سم،  
 $ب ج = ٥$ ،  $٧$  سم. أوجد طول كل من  $ا ب$ ،  $ع ص$

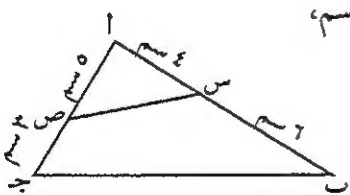


- ٣) في الشكل المقابل:  
 $\Delta ج د ه \sim \Delta ج ب ا$   
 باستخدام الأطوال الموضحة على الرسم  
 أوجد طول كل من  $ب ه$ ،  $و ه$ .

- ٤) أوجد قوة النقطة  $ج$  بالنسبة إلى الدائرة م التي طول نصف قطرها ٦ سم،  $ج م = ٦$  سم



- ٥) في الشكل المقابل:  $ا ب \cap و ه = {ج}$ ،  
 $ج ا = ج ب$ ،  $ج د = ٢$  سم،  $ج ه = ٨$  سم،  
 $م و$  مماسة للدائرة.  $م ب = \frac{١}{٢} ا ب$ . أوجد طول  $م و$ .



- ٦) في الشكل المقابل:  $ا ب ج$  مثلث، فيه  $س \in ا ب$  بحيث كان  $ا س = ٤$  سم،  
 $س ب = ٦$  سم،  $ص \in ا ج$  بحيث كان  $ا ص = ٥$  سم،  $ص ج = ٣$  سم.  
 أثبت أن:  $\Delta ا س ص \sim \Delta ا ج ب$   
 الشكل  $س ب ج$   $ص$  رباعي دائري.  
 إذا كانت  $م$  ( $\Delta ا س ص$ ) = ٨ سم<sup>٢</sup>. أوجد مساحة سطح المضلع  $س ب ج$   $ص$ .

مكتبة وادي  
 شربين، شارع حسني مبارك، خلف الثانوية بساتين  
 01004423597.3943035